MFiU
informatyka i ekonometria, III rok, I stopień
lista 9

9.1 Czy funkcja $s(x) = e^{-\frac{x^3}{12}}$ dla $x \geq 0$ może być funkcja przeżycia?

9.2 Uzasadnić, że następujący wzór jest prawdziwy

$$_{t_1+t_2+\ldots+t_n}p_x =_{t_1} p_x \cdot_{t_2} p_{x+t_1} \cdot_{t_3} p_{x+t_1+t_2} \cdot \ldots \cdot_{t_n} p_{x+t_1+t_2+\ldots+t_{n-1}}$$

9.3 Pokazać, że:

$$\mathring{e}_x = E(T(x)) = \int_0^\infty {}_tp_x dt$$

9.4 Mając dane $_tp_x = 1 - (\frac{t}{100})^{1,5}$ dla $x = 60$ oraz $0 < t < 100$ oblicz

a) $E(T(x))$
b) $P(K(x) = 20)$

9.5 Mając dane $G(t) = 1 - (\frac{100-t-x}{100-x})^2$ dla $0 \leq t \leq 100 - x$ oblicz

a) $_{10|5}q_{20}$
b) $E(T(x))$
c) $Var(T(x))$

Jaki jest wiek graniczny w tej populacji?

9.6 Niech X będzie zmienna losową o dystrybuancie danej wzorem

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x} \quad \text{dla} \quad x > 0$$

a) jaki rozkład ma zmienna losowa X?;
b) pokazać, że dystrybuanta zmiennej losowej $T(x)$ jest funkcją zależną jedynie od t (a nie od x) czyli, że posiada własność braku pamięci;

oblicz:

c) $E(T(x))$
d) $Var(T(x))$

9.7 niech X ma rozkład $U[0, \omega]$

a) pokazać, że $T(x)$ ma rozkład $U[0, \omega - x]$;
b) obliczyć $Var(T(x))$;
c) wyznaczyć rozkład zmiennej losowej $K(x)$.

9.8 Jeśli $s(x) = (1 - \frac{x}{100})^{\frac{1}{2}}$ gdzie $0 \leq x \leq 100$
oblicz:

a) $\mu(36)$;
b) $E(T(36))$.

9.9 Znając $_tp_x = \frac{100-x-t}{100-x}$ dla $0 \leq x \leq 100$ oraz $0 \leq t \leq 100 - x$ obliczyć μ_{45}.

9.10 Niech $\mu(x) = 0,001$ dla $20 \leq x \leq 25$ obliczyć $_{2|2}q_{20}$.

9.11 Wiedząc, że natężenie wymierania pewnej populacji dane jest wzorem

$$\mu_x = \frac{3}{100 - x} \quad 0 \leq x \leq 100$$

oblicz:

a) ${}_{10}p_{50}$

b) ${}_{12}q_{50}$

c) ${}_{10|5}q_{50}$

d) $s(50)$

9.12 Zakładając, że natężenie śmiertelności jest stałe dla $x \geq 50$ oraz $\overset{\circ}{e}_{50} = 40$, obliczyć p_{60}.

9.13 Korzystając z tablic życia wyznacz prawdopodobieństwa nastepujących zdarzeń

(a) (20) przeżyje jeszcze conajmniej rok;

(b) dożycie 3 roku życia;

(c) (90) dożyje 100 lat;

(d) (15) przeżyje jeszcze co najmniej 50 lat;

(e) (50) przeżyje dokładnie 2 lata (umrze pomiędzy 52 a 53 rokiem życia);

(f) (30) nie dożyje 31 urodzin;

(g) (80) przeżyje dokładnie 5 lat;

(h) (15) umrze w wieku 30 lat;

(i) (35) nie dożyje 45 urodzin;

(j) (65) umrze przed osiągnięciem 70 roku życia.

9.14 Niech $X \sim U[0, \omega]$ oraz $l_0 = 100000$, obliczyć l_x oraz d_x dla $x = 1, \ldots, \omega$.

9.15 Mając dane $l_x = (115 - x)^{\frac{1}{2}}$ dla $0 \leq x \leq 115$ obliczyć prawdopodobieństwo, że osoba w wieku 34 lat umrze miedzy 66 a 79 rokiem życia.

9.16 Korzystając tylko z wartości umieszczonych w tablicy zycia w kolumnie p_x wyznacz prawdopodobieństwa zdarzenia plegającego na tym, że losowo wybrany

a) (15) przeżyje co najmniej 3 lata;

b) (20) przeżyje co najmniej 2 lata;

c) (12) nie dożyje 14 roku życia;

d) (70) nie dożyje 74 urodzin;

e) noworodek nie dożyje wieku 5 lat.

9.17 Niech X będzie zmienna losową o dystrybuancie

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

a) obliczyć ilość zgonów pomiędzy 45 a 50 rokiem życia przyjmując $l_0 = 100000$;

b) pokazać, że $q_x = q_{x+1} = q_{x+2} = \ldots$

9.18 Jakim funduszem trzeba dysponować w chwili obecnej, aby obiecać grupie 1000 osób w wieku 35 lat płatności w wysokości 1j.p., które zostaną dokonane za 20 lat tym osobom, które dożyją 55 roku życia? Założyć stopę procentową w wysokości $i = 5\%$.

zadania do samodzielnego rozwiązania

1. Przedstawić ${}_3q_x$ za pomocą symboli aktuarialnych dotyczących rocznych okresów.

2. Obliczyć $e_x = E(K(x))$, gdy $T(0)$ ma rozkład wykładniczy z parametrem μ.

3. Pokazać, że $\lim\limits_{t \to 0} \frac{{}_tq_x}{t} = \mu(x)$.

4. Wiedząc, że natężenie wymierania pewnej populacji określone jest funkcją

$$\mu_x = \begin{cases} \frac{3}{110-x} & \text{dla } 0 \leq x < 50 \\ \frac{2{,}5}{100-x} & \text{dla } 50 \leq x < 100 \end{cases}$$

a) wyznaczyć ${}_tp_x, \quad 0 \le t \le 100 - x, \quad 0 \le x \le 100$

b) obliczyć $\overset{\circ}{e}_{30}$

5. Dla populacji ($l_0 = 100000$) noworodków w której $s(10) = 0,971$ ${}_{15}p_{10} = 0,986$ oraz ${}_{10}p_{15} = 0,990$ obliczyć

a) najbardziej prawdopodobną liczbe osób, które dożyją wieku 25 lat;

b) liczbę zgonów pomiędzy wiekiem 10 a 15 lat;

c) prawdopodobieństwo, że (10) umrze pomiędzy 15 a 25 rokiem życia.