

probabilistyka
matematyka, II stopień
lista 1

1. Dwuwymiarowa zmienna losowa (X, Y) ma rozkład prawdopodobieństwa określony następująco: $P(X = 1, Y = 1) = a, P(X = 1, Y = 2) = 0,3, P(X = 3, Y = 1) = 0,4, P(X = 3, Y = 2) = 0,1$. Wyznaczyć stałą a . Zapisać ten rozkład w tabeli. Obliczyć wartość dystrybuanty w punktach: $(0, 0), (1, 1), (2, 2)$.

2. Funkcja $F(x, y)$ jest określona następująco:

$$\text{a) } F(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 0 \text{ i } y < 0 \\ 1 & \text{w.p.p} \end{cases}$$

$$\text{b) } F(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 0 \text{ lub } y < 0 \\ 1 & \text{w.p.p} \end{cases}$$

$$\text{c) } F(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x + y \geq 0 \\ 0 & \text{w.p.p} \end{cases}$$

Zbadać czy tak określona funkcja może być traktowana jako dystrybuanta pewnej zmiennej losowej (X, Y) .

3. Dystrybuanta dwuwymiarowej zmiennej losowej (X, Y) dana jest wzorem

$$F(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 2 \text{ lub } y < 2 \\ (1 - \frac{1}{x})(1 - \frac{1}{y}) & \text{w.p.p.} \end{cases}$$

Wyznaczyć dystrybuanty brzegowe i oblicz prawdopodobieństwa $P(X > 2), P(1 < X \leq 3, 1 < Y \leq 3)$.

4. Na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, 2^\Omega, P)$, gdzie $\Omega = \{0, 1, \dots, 9\}, P(\{\omega\}) = 0,1 \forall \omega \in \Omega$, określone są zmienne losowe $X(\omega)$ - reszta z dzielenia ω przez 2, $Y(\omega)$ - reszta z dzielenia ω przez 3. Znaleźć rozkład wektora losowego (X, Y) . Ile wynosi $P(X = Y)$?

5. Rzucamy trzy razy monetą. Niech zmienna losowa X przyjmuje wartości równe ilości wyrzuconych orłów, natomiast zmienna losowa Y przyjmuje wartość 0, jeśli w pierwszym rzucie wypadł orzeł lub wartość 1, jeśli w pierwszym rzucie wypadła reszka. Wyznaczyć rozkład zmiennej losowej (X, Y) .

6. Zmienna losowa dwuwymiarowa (X, Y) ma rozkład jednostajny wewnątrz prostokąta ograniczonego odciętymi $x = a, x = b$ i rzędnymi $y = c, y = d$ ($b > a, d > c$). Znaleźć gęstość prawdopodobieństwa i dystrybuantę tej zmiennej losowej.

7. Funkcja

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{-y} & \text{dla } 0 \leq x < \infty, x \leq y < \infty \\ 0 & \text{w.p.p} \end{cases}$$

określa gęstość zmiennej losowej (X, Y) . Obliczyć dystrybuantę tej zmiennej.

8. Wyznaczyć dystrybuantę $F(x, y)$ dwuwymiarowej zmiennej losowej (X, Y) , jeśli dana jest jej gęstość

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{dla } 0 \leq x < 1, x \leq y \leq 2 - x \\ 0 & \text{w.p.p} \end{cases}$$