probabilistyka
matematyka, II stopień
lista 2

1. Dwuwymiarowa zmienna losowa (X, Y) ma gęstość

$$f(x,y) = \begin{cases} cx(x-y) & \text{dla} \quad 0 < x < 2, -x < y < x \\ 0 & \text{w.p.p} \end{cases}$$

   a) obliczyć stałą c;
   b) obliczyć $P((X,Y) \in A)$, gdzie $A = \{(x,y) : 0 < x < 2, 0 < y < x\}$;
   c) znaleźć rozkłady brzegowe.

2. Dana jest funkcja

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{8}(x^2 - y^2)e^{-x} & \text{dla} \quad |y| \leq x \\ 0 & \text{w.p.p} \end{cases}$$

   Zbadać czy tak określona funkcja jest gęstością dwuwymiarowej zmiennej losowej (X, Y).

3. Niech

$$f(x,y) = \begin{cases} c(x^2 + y^2) & \text{dla} \quad (x,y) \in K \\ 0 & \text{w.p.p} \end{cases}$$

   gdzie $K = \{(x,y) \in R^2 : 0 \leq x \leq 1, x - 1 \leq y \leq 1 - x\}$

   a) wyznaczyć stałą c tak, aby funkcja $f(x,y)$ była gęstością pewnej zmiennej losowej (X, Y);
   b) obliczyć $P(X^2 + Y^2 \leq 0,5)$.

4. Niech (X, Y, Z) będzie trzywymiarową zmienną losową o gęstości $f(x,y,z) = cg(x,y,z)$. Wyznaczyć stałą c, jeżeli:

   a) $g(x,y,z) = 1$ dla $0 \leq x \leq 1,\ -2 \leq y \leq\ 3,\ 4 \leq z \leq\ 5$ i $g(x,y,z) = 0$ w pozostałej części R^3;
   b) $g(x,y,z) = 1$ dla $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ i $g(x,y,z) = 0$ w pozostałej części R^3;
   c) $g(x,y,z) = x^{l-1}y^{m-1}z^{n-1}$ dla $x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0$ i $g(x,y,z) = 0$ w pozostałej części R^3 gdzie $l \geq 1, m \geq 1, n \geq 1$.

5. Zmienna losowa (X, Y) ma gęstość

$$f(x,y) = \frac{a}{\pi^2(16 + x^2)(25 + y^2)},$$

   a) wyznaczyć parametr a;
   b) znaleźć dystrybuantę $F(x,y)$;
   c) znaleźć rozkłady brzegowe.

6. Wyznaczyć gęstość prawdopodobieństwa trzywymiarowej zmiennej losowej (X, Y, Z) mając daną dystrybbuantę

$$F(x,y,z) = (1 - e^{-ax})(1 - e^{-by})(1 - e^{-cz})$$

   dla $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$.

7. Obliczyć prawdopodobieństwo trafienia punktu o współrzędnych (X, Y) w obszar określony nierównościami $1 \leq x \leq 2,\ 1 \leq y \leq 2$, jeżeli współrzędne punktu (X, Y) mają następującą dystrybuantę

$$F(x,y) = \begin{cases} 1 - a^{-x^2} - a^{-y^2} + a^{-x^2-2y^2} & \text{dla} \quad x \geq 0\ y \geq 0, \\ 0 & \text{w.p.p} \end{cases}$$

8. Współrzędne punktu losowego (X,Y) mają rozkład jednostajny wewnątrz prostokąta ograniczonego odciętymi 0 i a oraz rzędnymi 0 i b. Obliczyć prawdopodobieństwo trafienia punktu losowego w koło o promieniu R, jeżeli $a > b$, a środek koła pokrywa się z początkiem układu współrzędnych.

9. Gęstość prawdopodobieństwa układu zmiennych losowych (X, Y) dana jest wzorem

$$f(x,y) = \begin{cases} c(R - \sqrt{x^2+y^2}) & \text{dla} \quad x^2+y^2 \le R^2 \\ 0 & \text{w.p.p} \end{cases}$$

Wyznaczyć stałą c oraz prawdopodobieństwo trafienia w koło o promieniu $a < R$ ze środkiem w początku układu współrzędnych.

10. Zmienna losowa dwuwymiarowa (X, Y) ma rozkład dany gęstością

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{4}{3x^2y^2} & \text{dla} \quad x \ge 1, \ \frac{1}{x} \le y \le x^2 \\ 0 & \text{w.p.p} \end{cases}$$

Znaleźć dystrybuantę tej zmiennej losowej.

11. Niech $\lambda > 0$ oraz niech

$$f(x,y,z) = \begin{cases} \alpha e^{-\lambda(x+y+z)} & \text{dla} \quad x \ge 0, \ y \ge, \ z \ge 0 \\ 0 & \text{w.p.p} \end{cases}$$

Dla jakiej wartości parametru α funkcja $f(x,y,z)$ jest gęstością wektora losowego? Wyznaczyć dystrybuantę tej zmiennej losowej.