

**probabilistyka**  
**matematyka, II stopień**  
**lista 3**

1. Dwuwymiarowa zmienna losowa  $(X, Y)$  ma rozkład prawdopodobieństwa określony następująco:  
 $P(X = 1, Y = 1) = 0, 2, \quad P(X = 1, Y = 2) = 0, 3, \quad P(X = 3, Y = 1) = 0, 4, \quad P(X = 3, Y = 2) = 0, 1.$ 
  - Zapisać ten rozkład w tabeli,
  - zbadać czy zmienne losowe  $X$  i  $Y$  są niezależne,
  - wyznaczyć dystrybuantę i wartość przeciętną zmiennej losowej  $X$ ,
  - obliczyć wartość dystrybuanty dwuwymiarowej zmiennej losowej  $(X, Y)$  w punkcie  $(2, 2)$ .
2. W 10-cio elementowej partii pewnego towaru są 2 sztuki wadliwe. Wylosowano bez zwrotu 2 sztuki. Niech zmienna losowa  $X$  przyjmuje wartości równe liczbie sztuk wadliwych wśród 2 wylosowanych sztuk, zaś  $Y$  przyjmuje wartość 1, jeśli pierwsza wylosowana sztuka jest wadliwa, oraz 0, jeśli nie jest wadliwa.
  - Wyznaczyć rozkład dwuwymiarowej zmiennej losowej  $(X, Y)$ ,
  - zbadać czy zmienne losowe  $X$  i  $Y$  są niezależne,
  - obliczyć współczynnik korelacji zmiennych  $X$  i  $Y$ .
3. Rzucamy kolejno 5 razy monetą. Oznaczmy przez  $X$  liczbę wyrzuconych orłów, przez  $Y$  liczbę serii orłów, a przez  $Z$  długość najdłuższej serii.
  - Wyznaczyć rozkłady dwuwymiarowych zmiennych losowych  $(X, Y)$ ,  $(X, Z)$  oraz  $(Y, Z)$ ,
  - wyznaczyć rozkłady brzegowe poszczególnych zmiennych losowych,
  - obliczyć  $P(X = 3, Z \leq 2)$ ,
  - wyznaczyć rozkład trzywymiarowej zmiennej losowej  $(X, Y, Z)$ .
4. Zmienne losowe  $X$  i  $Y$  są niezależne i mają rozkład jednostajny odpowiednio na przedziałach  $(0, a)$  i  $(0, \frac{1}{2}\pi)$ . Znaleźć  $P(X < b \cos Y)$ , gdzie  $0 < b < a$ .
5. Jakie jest prawdopodobieństwo, że równanie  $x^2 - 2Bx + C = 0$  ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste, jeśli  $B$  i  $C$  są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie  $Exp(\lambda)$ ?
6. Momenty przybycia autobusów A i B są niezależnymi zmiennymi losowymi  $X, Y$  o rozkładzie wykładniczym z parametrami  $\alpha$  i  $\mu$ 
  - a) znaleźć rozkład momentu przybycia pierwszego autobusu;
  - b) obliczyć prawdopodobieństwo, że autobus A przyjedzie pierwszy.
7. Dana jest funkcja
$$f(x, y) = ce^{-\frac{1}{2}(x^2+2xy+5y^2)}$$
  - wyznaczyć stałą  $c$  tak, aby dana funkcja była gęstością zmiennej losowej  $(X, Y)$ ,
  - wyznaczyć rozkłady brzegowe,
  - czy zmienne losowe  $X$  i  $Y$  są niezależne?
8. Dana jest gęstość prawdopodobieństwa układu zmiennych losowych  $(X, Y)$ 
$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2} \sin(x + y) & \text{dla } 0 < x < \frac{\pi}{2}, 0 < y < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{w.p.p.,} \end{cases}$$
  - wyznaczyć dystrybuantę układu,
  - wyznaczyć rozkłady brzegowe,
  - zbadać czy zmienne losowe są niezależne.
9. Niech dwuwymiarowa zmienna losowa  $(X, Y)$  ma rozkład jednostajny na  $K$ , gdzie  $K = \{(x, y) \in R^2 : |x| + |y| \leq a\}$ . Czy zmienne losowe  $X$  i  $Y$  są niezależne?

10. Trójwymiarowa zmienna losowa  $(X, Y, Z)$  ma rozkład równomierny w obszarze  $V = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq 4 \text{ i } 0 \leq z \leq 1\}$ . Wyznaczyć gęstość rozkładu brzegowego zmiennej losowej  $Z$  oraz obliczyć wartość oczekiwaną  $E(Z)$ , czy zmienne losowe  $X, Y$  oraz  $Z$  są niezależne?

11. Zmienna losowa  $(X, Y)$  ma rozkład określony gęstością:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{4}{xy^3} & \text{dla } a < x < y < \infty \\ 0 & \text{w.p.p} \end{cases}$$

- sprawdzić dla jakiego  $a$  podana funkcja jest gęstością,
- znaleźć dystybuantę,
- znaleźć gęstości rozkładów brzegowych,
- sprawdzić czy zmienne  $X$  i  $Y$  są niezależne,
- policzyć wartości przeciętne rozkładów brzegowych.

12. Dwuwymiarowa zmienna losowa  $(X, Y)$  ma gęstość daną wzorem

$$f(x, y) = \begin{cases} A & \text{dla } (x, y) \in V \\ 0 & \text{w.p.p} \end{cases}$$

gdzie  $V$  jest obszarem ograniczonym półokręgiem o promieniu 1, położonym nad osią  $Ox$ . Obliczyć  $E(XY)$

13. Dwie niezależne zmienne losowe  $X$  i  $Y$  mają rozkłady normalne  $N(m, \sigma)$  z takimi samymi parametrami. Znaleźć współczynnik korelacji zmiennych losowych  $U = aX + bY$  i  $V = aX - bY$ .

14. Dwuwymiarowa zmienna losowa  $(X, Y)$  ma gęstość daną wzorem

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{12}{11}(2x^2 + xy) & \text{dla } (x, y) \in (0, 1) \times (0, 1) \\ 0 & \text{w.p.p} \end{cases}$$

Obliczyć współczynnik korelacji.

15. Niech  $S$  będzie trójkątem ograniczonym prostymi  $y = -x$ ,  $y = x$  oraz  $y = 1$ . Dwuwymiarowa zmienna losowa  $(X, Y)$  ma gęstość daną wzorem

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{dla } (x, y) \in S \\ 0 & \text{w.p.p} \end{cases}$$

- obliczyć kowariancję  $Cov(X, Y)$ ,
- obliczyć współczynnik korelacji zmiennych losowych  $X, Y$
- czy zmienne losowe  $X$  i  $Y$  są niezależne?

16. Niech  $X_1, X_2, \dots, X_n$  będą niezależnymi zmiennymi losowymi i mają rozkład

- jednostajny na przedziale  $[\alpha, \beta]$
- równomierny dwupunktowy  $W_{X_i} = \{1, 2\}$

Niech  $U = \min(X_1, X_2, \dots, X_n)$ , natomiast  $V = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$ . Wyznaczyć rozkład dwuwymiarowej zmiennej losowej  $(U, V)$ .

17. Niech  $F(x, y)$  będzie dystrybuantą dwuwymiarowej zmiennej losowej  $(X, Y)$ , a  $G(x, y)$  będzie dystrybuantą dwuwymiarowej zmiennej losowej  $(U, V)$ , gdzie  $U = \max(X, Y)$  oraz  $V = \min(X, Y)$ . Wyrazić  $G(x, y)$  przez  $F(x, y)$