

**probabilistyka**  
**matematyka, II stopień**  
**lista 5**

1. W 10-cio elementowej partii pewnego towaru są 2 sztuki wadliwe. Wylosowano bez zwrotu 2 sztuki. Niech zmienna losowa  $X$  przyjmuje wartości równe liczbie sztuk wadliwych wśród 2 wylosowanych sztuk, zaś  $Y$  przyjmuje wartość 1, jeśli pierwsza wylosowana sztuka jest wadliwa, oraz 0, jeśli nie jest wadliwa. Obliczyć  $P(X + Y = 2)$  oraz  $E(X + Y)$ .
2. Niech  $X \sim Poisson(\lambda_1)$ ,  $Y \sim Poisson(\lambda_2)$  będą niezależnymi zmiennymi losowymi. Wyznaczyć rozkład zmiennej losowej  $X + Y$ . Rozwiązanie uogólnić na dowolną sumę rozkładów Poissona.
3. Niech  $X_1, X_2$  będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach odpowiednio  $N(m_1, \sigma_1)$ ,  $N(m_2, \sigma_2)$ . Znaleźć gęstość zmiennej losowej  $X_1 + X_2$ .
4. Niech zmienne losowe  $X, Y$  będą niezależne i mają jednakowe rozkłady  $Exp(1)$ , i niech  $U = X + Y$ ,  $V = \frac{X}{X+Y}$ . Znaleźć
  - gęstość zmiennej losowej  $U$ ;
  - gęstość zmiennej losowej  $V$ ;
  - czy zmienne  $U, V$  są niezależne ?
5. Niech  $X$  i  $Y$  będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach odpowiednio  $Exp(\lambda)$  oraz  $U[0, 1]$ . Wyznaczyć rozkład zmiennej losowej  $Z = X + Y$ .
6. Niech zmienna losowa  $X$  ma rozkład równomierny dwupunktowy i  $W_X = \{0, 1\}$ , natomiast zmienna losowa  $Y$  ma rozkład  $U[0, 1]$ . Wyznaczyć rozkład zmiennej losowej  $Z = X + Y$ . Zakładamy niezależność zmiennych losowych  $X, Y$ .
7. Każdy z dwóch odcinków o długości  $a$  podzielono losowo wybranym punktem na 2 części. Zakładając, że długości krótszych odcinków są zmiennymi losowymi o rozkładzie jednostajnym, obliczyć prawdopodobieństwo, że suma długości krótszych odcinków spełnia nierówność  $\frac{1}{4}a \leq S \leq \frac{3}{4}a$ .
8. Zakładając, że zmienne losowe  $X$  i  $Y$  są niezależne i mają te same rozkłady geometryczne z parametrem  $p$ , wyznaczyć rozkład zmiennej losowej  $Z = X + Y$ .
9.  $X$  i  $Y$  są niezależnymi, stadnaryzowanymi zmiennymi losowymi o rozkładzie normalnym. Wyznaczyć rozkład zmiennej losowej  $Z = X^2 + Y^2$ .
10. Wykazać, że kompozycja niezależnych rozkładów gamma jest również rozkładem gamma.
11. Znaleźć kompozycję dwóch niezależnych rozkładów jednostajnych na odcinku  $[0, 1]$ .
12. Dwuwymiarowa zmienna losowa  $(X, Y)$  ma rozkład o gęstości

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{5}}{2\pi} \exp\left[-\frac{1}{2}(x^2 + 2xy + 5y^2)\right].$$

Wyznaczyć łączny rozkład układu zmiennych losowych  $(U, V)$ , gdzie  $U = X + Y$  i  $V = X - Y$ .

13.  $X, Y$  są niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie wykładniczym. Wykazać, że zmienne  $X+Y, \frac{X}{Y}$  są niezależnymi zmiennymi losowymi.
14. Niech niezależne zmienne losowe  $X, Y$  mają rozkład wykładniczy z parametrem  $\lambda$ . Wyznaczyć  $E(X + Y)$  oraz  $E(X - Y)$ .