rachunek prawdopodobieństwa
matematyka zawodowa III rok
lista 18

1. Z odcinka $[0,1]$ wybieramy losowo punkt M. Zmienna losowa X przyjmuje wartości równe długości odcinka $0M$. Obliczyć warunkową wartość oczekiwaną zmiennej X wiedząc, że
   a) $M \in (0, \frac{1}{3})$
   b) $M \notin (\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$
2. Obliczyć wartość oczekiwaną liczby rzutów monetą aż do otrzymania n orłów pod rząd.
3. Z urny zawierającej bardzą dużą ilość białych i czarnych kul zmieszanych w równych ilościach wyciągamy kolejno 10 kul. Kule wyciągnięte do pierwszego pojawienia się kuli czarnej zwracamy do urny; pierwszą wyciągniętą kulę czarną i wszystkie następne wkładamy do drugiej początkowo pustej urny. Obliczyć wartość oczekiwaną ilości białych i czarnych kul w drugiej urnie.
4. Niech X będzie liczbą orłów otrzymanych przy dwukrotnym rzucie monetą, A - zdarzeniem polegającym na wypadnięciu orła w pierwszym rzucie. Obliczyć $E(X|\mathcal{F})$ gdzie $\mathcal{F} = \sigma(A)$.
5. Łączny rozkład zmiennych losowych dany jest tabelką

	$X = 1$	$X = 3$
$Y = 0$	$0,2$	$0,3$
$Y = 2$		$0,4$

   Uzupełnić tabelkę, znaleźć $E(X|\sigma(Y))$.
6. Obliczyć wartość oczekiwaną liczby prób w schemacie Bernoulliego przeprowadzanych aż do monetu uzyskania kolejno:
   a) sukcesu i porażki;
   b) dwóch sukcesów i porażki.
7. Rzucamy 10 razy symetryczną monetą. Niech X oznacza łączną liczbę orłów, zaś Y liczbę orłów w pierwszych czterech rzutach. Znaleźć $E(X|Y)$.
8. Znaleźć rozkład warunkowy X pod warunkiem $X + Y = t$, jeśli X i Y są niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie
   a) wykładniczym z parametrem λ;
   b) Poissona z parametrem λ;
   c) $\mathcal{N}(0, \sigma)$.
9. Niech (X, Y) ma rozkład o gęstości
$$f(x,y) = 8xy\mathbf{1}_{\{x>0,y>0,x^2+y^2<1\}}(x,y).$$
   Znaleźć $E(Y|X = \frac{1}{2})$.
10. Dana jst gęstość prawdopodobieństwa układu zmiennych losowych nieujemnych
$$f(x,y) = kxyexp(-(x^2 + y^2)) \quad (x \geq 0, y \geq 0).$$
   Wyznaczyć $k, f(x|y), f(y|x)$.
11. Dana jest gęstość prawdopodobieństwa układu dwóch zmiennych losowych
$$f(x,y) = kexp(-4x^2 - 6xy - 9y^2)$$
   Wyznaczyć stałą k oraz gęstości warunkowe $f(x|y), f(y|x)$.

12. Współrzędne prostokątne X, Y, Z punktu losowego w przestrzeni mają rozkład normalny

$$f(x,y,z) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} abc} exp[-\frac{1}{2}(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2})]$$

Wyznaczyć

a) gęstość prawdopodobieństwa współrzędnych sferycznych tego punktu (R, Θ, Φ), jeśli $x = r\cos\theta\cos\varphi$, $y = r\cos\theta\sin\varphi$, $z = \sin\theta$

b) gęstości warunkowe prawdopodobieństwa $f(r|\theta,\varphi)$ oraz $f(\varphi|r,\theta)$

13. Układ zmiennych losowych (X, Y) ma rozkład jednostajny wewnątrz kwadratu o boku a. Przekątne kwadratu pokrywają się z osiami współrzędnych. Wyznaczyć:

a) gęstość prawdopodobieństwa układu (X, Y);

b) gęstość prawdopodobieństwa każdej ze współrzędnych prostokątnych;

c) gęstości warunkowe prawdopodobieństwa;

14. Układ zmiennych losowych (X, Y, Z) ma jednostajny rozkład prawdopodobieństwa wewnątrz kuli o promieniu R. Wyznaczyć dla punktów leżących wewnątrz kuli gęstość prawdopodobieństwa współrzędnej prostokątnej Z i warunkową gęstość prawdopodobieństwa $f(x,y|z)$.

15. Niech X i Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi i niech $Z = X - Y$. Znaleźć $P(|Z| < 1|\ X = 1)$, $F_{Z|Y}(0|1)$ jeśli X i Y mają ten sam rozkład jednostajny na przedziale $(0, 2)$.

16. Wektor losowy (X, Y, Z) ma rozkład o gęstości

$$f(x,y,z) = \frac{1}{12} xy^2 z^3 exp[-(x+y+z)] \quad (x > 0, y > 0, z > 0)$$

Obliczyć $E(Z|X = z, Y = y)$.