probabilistyka
matematyka, II stopień
lista 7

1. Podać przykład ciągu zmiennych losowych określonych na tej samej przestrzeni Ω, zbieżnego według rozkładu, który nie jest zbieżny według prawdopodobieństwa.

2. Wykazać, że jeśli $X, X_1, X_2, \ldots$ są zmiennymi losowymi, t.że $X_n \xrightarrow{D} X$, gdzie $P(X = c) = 1$, $c \in R$, to $X_n \xrightarrow{P} c$.

3. Udowodnić, że jeśli $X_n \xrightarrow{D} X$, $a, b \in R$, to $aX_n + b \xrightarrow{D} aX + b$.

4. Niech $\mu, \mu_1, \mu_2, \ldots$ będą miarami skupionymi na zbiorze liczb całkowitych nieujemnych. Wykazać, że
$$\mu_n \xrightarrow{s} \mu \iff \forall_{k \in N \cup \{0\}} \quad \mu_n(\{k\}) \longrightarrow \mu(\{k\})$$

5. Udowodnić, że jeśli $X_n \xrightarrow{D} X$, $Y_n \xrightarrow{D} 0$, to $X_n + Y_n \xrightarrow{D} X$.

6. Udowodnić, że jeśli $X_n \xrightarrow{D} X$, $Y_n \xrightarrow{D} c$, to $X_n + Y_n \xrightarrow{D} X + c$.

7. Podać przykład zmiennych losowych X_n, Y_n, X, Y t.że $X_n \xrightarrow{D} X$ oraz $Y_n \xrightarrow{D} Y$, ale nieprawda, że $X_n + Y_n \xrightarrow{D} X + Y$.

8. Udowodnić, że jeśli $X_n \xrightarrow{D} X$, $Y_n \xrightarrow{D} 0$, to $X_n Y_n \xrightarrow{D} 0$.

9. Udowodnić, że jeśli $X_n \xrightarrow{D} X$, $Y_n \xrightarrow{D} a$, to $X_n Y_n \xrightarrow{D} aX$.

10. **(owad i mrówki)** Owad składa jaja zgodnie z rozkładem Poissona z parametrem a. W nocy mrówki kradną mu jaja: szansa, że dane jajo zostanie ukradzione, wynosi q. Następnego dnia historia się powtarza (liczba złożonych jaj ma ten sam rozkład, co poprzedniego dnia i jest niezależna od przeszłości), itd. Jaki jest rozkład graniczny liczby jaj ocalonych przed mrówkami?

11. Niech $X_n \xrightarrow{D} X$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, a - punkt ciągłości dystrybuanty F_X. Udowodnić, że $\lim_n F_{X_n}(a_n) = F(a)$.

12. Dane są dwa ciągi zmiennych losowych (X_n), (Y_n), gdzie $X_n \sim Exp(\frac{1}{n})$ natomiast $Y_n \sim U[0, \frac{1}{n}]$. Zbadać zbieżność tych ciągów według rozkładu.

13. Dane są dwa ciągi zmiennych losowych (X_n), (Y_n), gdzie $X_n \sim Exp(\sqrt{n})$ natomiast $P(Y_n = 0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{n}$, $P(Y_n = 1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{n}$. Zbadać zbieżność tych ciągów według rozkładu.

14. Niech (X_n) będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie $U[0, 1]$ oraz $Y_n = n \cdot min(X_1, \ldots, X_n)$. Czy istnieje taka zmienna losowa Y, że $Y_n \xrightarrow{D} Y$?