probabilistyka
matematyka, II stopień
lista 8

1. Policzyć funkcje charakterystyczne rozkładów:

   a) rozkładu Bernoulliego;
   b) rozkładu Poissona;
   c) rozkładu dwupunktowego ($1 > p > 0,\ P(X = 1) = p,\ P(X = 0) = 1 - p$);
   d) rozkładu geometrycznego;
   e) zmiennej lososwej, która przyjmuje wartości równe ilości wyrzuconych oczek kostką do gry;
   f) rozkładu jednostajnego na odcinku $(-1, 1)$;
   g) rozkładu trójkątnego równoramiennego na odcinku $[-1, 1]$;
   h) rozkładu wykładniczego;
   j) rozkładu Laplace'a;
   k) rozkładu Cauchy'ego;
   l) rozkładu $N(0, 1)$;
   m) rozkładu $N(m, \sigma)$.

2. Wyznaczyć funkcję charakterystyczną ilości pojawień się zdarzenia A przy n niezależnych doświadczeniach, jeśli prawdopodobieństwo pojawienia się zdarzenia A jest dla każdego doświadczenia różne i dla k-tego doświadczenia równe p_k $\ (k = 1, 2, \ldots, n)$.

3. Wyznaczyć funkcję charakterystyczną zmiennej losowej X o rozkładzie

$$P(\{\omega : X(\omega) = m\}) = \frac{a^m}{(1 + a)^{m+1}} \qquad a > 0, m \in N \cup \{0\}.$$

   Następnie wyznaczyć wartość oczekiwaną i wariancję w oparciu o funkcję charakterystyczną.

4. Sprawdzić, że funkcja charakterystyczna φ rozkładu zmiennej losowej posiada własności:

   a) $|\varphi(t)| \leq \varphi(0) = 1$;
   b) dla dowolnej liczby naturalnej n, dowolnych liczb zespolonych $z_1, \ldots, z_n$ oraz dowolnych $t_1, \ldots, t_n$, spełniona jest nierówność

$$\sum_{k,l=1}^{n} \varphi(t_k - t_l) z_k \overline{z_l} \geq 0$$

   c) $\varphi(-t) = \overline{\varphi(t)}$

5. Czy funkcja

   a) $f(t) = exp(-|t|i)$;
   b) $\phi(t) = \frac{1}{1+i|t|}$

   może być funkcją charakterystyczną pewnego rozkładu?

6. Wiedząc, że funkcja ϕ jest funkcją charakterystyczną udowodnić, że funkcja sprzężona jest również funkcją charakterystyczną.

7. Mając daną funkcję charakterystyczną znaleźć rozkład zmiennej losowej:

   a) $\phi(t) = \frac{1}{4}(exp(-it) + exp(it))^2$;
   b) $\phi(t) = \frac{1}{4}(1 + exp(it))^2$;
   c) $\phi(t) = \cos(t)$;
   d) $\phi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos(kt), \qquad a_k > 0,\ \sum_{k=0}^{\infty} a_k = 1$;
   e) $\phi(t) = \frac{1}{2-e^{it}}$.

8. Mając daną funkcję charakterystyczną znaleźć rozkład zmiennej losowej:

   a) $\phi(t) = e^{-a|t|}, \quad a > 0;$

   b) $\phi(t) = \frac{1+it}{1+t^2};$

   c) $\phi(t) = \frac{1-it}{1+t^2};$

   d) $\phi(t) = e^{-\frac{1}{2}t^2};$

   e) $\phi(t) = \frac{1}{1+t^2}.$

9. Obliczyć momenty zmiennej losowej X z ostaniego przykładu zadania 8.

10. Korzystając z funkcji charakterystycznej policzyć:

    a) wartość oczekiwaną dla rozkładu Poissona;

    b) k-ty moment zmiennej losowej o rozkładzie wykładniczym z parametrem λ;

    c) k-ty moment zmiennej losowej o rozkladzie Poissona.

11. Danych jest n niezależnych zmiennych losowych o jednakowych rozkładach równomiernych na odcinku $(-1, 1)$. Obliczyć funkcję charakterystyczną zmiennej losowej będącej sumą danych zmiennych.

12. Funkcja charakterystyczna zmiennej losowej X ma postać $\phi(t) = e^{-|t|}$. Czy istnieje $E(X)$?

13. Niech $X_1, \ldots, X_n$ będą zmiennymi losowymi niezależnymi o rozkładzie Poissona z parametrami odpowiednio $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Korzystając z własności funkcji charakterystycznych pokazać, że zmienna losowa $Y = X_1 + \cdots + X_n$ ma rozkład Poissona.

14. Niech X i Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach normalnych standaryzowanych. Znaleźć rozkład zmiennej losowej $Z = X - Y$.