

probabilistyka
matematyka, II stopień
lista 5

1. W 10-cio elementowej partii pewnego towaru są 2 sztuki wadliwe. Wylosowano bez zwrotu 2 sztuki. Niech zmienna losowa X przyjmuje wartości równe liczbie sztuk wadliwych wśród 2 wylosowanych sztuk, zaś Y przyjmuje wartość 1, jeśli pierwsza wylosowana sztuka jest wadliwa, oraz 0, jeśli nie jest wadliwa. Obliczyć $P(X + Y = 2)$ oraz $E(X + Y)$.
2. Niech $X \sim Poisson(\lambda_1)$, $Y \sim Poisson(\lambda_2)$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi. Wyznaczyć rozkład zmiennej losowej $X + Y$. Rozwiązanie uogólnić na dowolną sumę rozkładów Poissona.
3. Niech X_1, X_2 będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach odpowiednio $N(m_1, \sigma_1)$, $N(m_2, \sigma_2)$. Znaleźć gęstość zmiennej losowej $X_1 + X_2$.
4. Niech zmienne losowe X, Y będą niezależne i mają jednakowe rozkłady $Exp(1)$, i niech $U = X + Y$, $V = \frac{X}{X+Y}$. Znaleźć
 - gęstość zmiennej losowej U ;
 - gęstość zmiennej losowej V ;
 - czy zmienne U, V są niezależne?
5. Niech X i Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach odpowiednio $Exp(\lambda)$ oraz $U[0, 1]$. Wyznaczyć rozkład zmiennej losowej $Z = X + Y$.
6. Niech zmienna losowa X ma rozkład równomierny dwupunktowy i $W_X = \{0, 1\}$, natomiast zmienna losowa Y ma rozkład $U[0, 1]$. Wyznaczyć rozkład zmiennej losowej $Z = X + Y$. Zakładamy niezależność zmiennych losowych X, Y .
7. Każdy z dwóch odcinków o długości a podzielono losowo wybranym punktem na 2 części. Zakładając, że długości krótszych odcinków są zmiennymi losowymi o rozkładzie jednostajnym, obliczyć prawdopodobieństwo, że suma długości krótszych odcinków spełnia nierówność $\frac{1}{4}a \leq S \leq \frac{3}{4}a$.
8. Zakładając, że zmienne losowe X i Y są niezależne i mają te same rozkłady geometryczne z parametrem p , wyznaczyć rozkład zmiennej losowej $Z = X + Y$.
9. X i Y są niezależnymi, stadnaryzowanymi zmiennymi losowymi o rozkładzie normalnym. Wyznaczyć rozkład zmiennej losowej $Z = X^2 + Y^2$.
10. Wykazać, że kompozycja niezależnych rozkładów gamma jest również rozkładem gamma.
11. Znaleźć kompozycję dwóch niezależnych rozkładów jednostajnych na odcinku $[0, 1]$.
12. Dwuwymiarowa zmienna losowa (X, Y) ma rozkład o gęstości

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{5}}{2\pi} \exp\left[-\frac{1}{2}(x^2 + 2xy + 5y^2)\right].$$

Wyznaczyć łączny rozkład układu zmiennych losowych (U, V) , gdzie $U = X + Y$ i $V = X - Y$.

13. X, Y są niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie wykładniczym. Wykazać, że zmienne $X+Y, \frac{X}{Y}$ są niezależnymi zmiennymi losowymi.
14. Niech niezależne zmienne losowe X, Y mają rozkład wykładniczy z parametrem λ . Wyznaczyć $E(X + Y)$ oraz $E(X - Y)$.