

probabilistyka
matematyka, II stopień
lista 7

1. Policzyc funkcje charakterystyczne rozkładów:

- a) rozkładu Bernoulliego;
- b) rozkładu Poissona;
- c) rozkładu dwupunktowego ($1 > p > 0$, $P(X = 1) = p$, $P(X = 0) = 1 - p$);
- d) rozkładu geometrycznego;
- e) zmiennej losowej, która przyjmuje wartości równe ilości wyrzuconych oczek kostką do gry;
- f) rozkładu jednostajnego na odcinku $(-1, 1)$;
- g) rozkładu trójkątnego równoramiennego na odcinku $[-1, 1]$;
- h) rozkładu wykładniczego;
- j) rozkładu Laplace'a;
- k) rozkładu Cauchy'ego;
- l) rozkładu $N(0, 1)$;
- m) rozkładu $N(m, \sigma)$.

2. Sprawdzić, że funkcja charakterystyczna φ rozkładu zmiennej losowej posiada własności:

- a) $|\varphi(t)| \leq \varphi(0) = 1$;
- b) dla dowolnej liczby naturalnej n , dowolnych liczb zespolonych z_1, \dots, z_n oraz dowolnych t_1, \dots, t_n , spełniona jest nierówność

$$\sum_{k,l=1}^n \varphi(t_k - t_l) z_k \bar{z}_l \geq 0$$

- c) $\varphi(-t) = \overline{\varphi(t)}$

3. Czy funkcja

- a) $f(t) = \exp(-|t|i)$;
- b) $\phi(t) = \frac{1}{1+i|t|}$

może być funkcją charakterystyczną pewnego rozkładu?

4. Wiedząc, że funkcja ϕ jest funkcją charakterystyczną udowodnić, że funkcja sprzężona jest również funkcją charakterystyczną.

5. Mając daną funkcję charakterystyczną znaleźć rozkład zmiennej losowej:

- a) $\phi(t) = \frac{1}{4}(\exp(-it) + \exp(it))^2$;
- b) $\phi(t) = \frac{1}{4}(1 + \exp(it))^2$;
- c) $\phi(t) = \cos(t)$;
- d) $\phi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos(kt)$, $a_k > 0$, $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = 1$;
- e) $\phi(t) = \frac{1}{2-e^{it}}$.

6. Mając daną funkcję charakterystyczną znaleźć rozkład zmiennej losowej:

- a) $\phi(t) = e^{-a|t|}$, $a > 0$;
- b) $\phi(t) = \frac{1+it}{1+t^2}$;
- c) $\phi(t) = \frac{1-it}{1+t^2}$;
- d) $\phi(t) = e^{-\frac{1}{2}t^2}$;
- e) $\phi(t) = \frac{1}{1+t^2}$.

7. Obliczyć momenty zmiennej losowej X z ostatniego przykładu zadania 8.
8. Korzystając z funkcji charakterystycznej policzyć:
 - a) wartość oczekiwaną dla rozkładu Poissona;
 - b) k -ty moment zmiennej losowej o rozkładzie wykładniczym z parametrem λ ;
 - c) k -ty moment zmiennej losowej o rozkładzie Poissona.
9. Danych jest n niezależnych zmiennych losowych o jednakowych rozkładach równomiernych na odcinku $(-1, 1)$. Obliczyć funkcję charakterystyczną zmiennej losowej będącej sumą danych zmiennych.
10. Funkcja charakterystyczna zmiennej losowej X ma postać $\phi(t) = e^{-|t|}$. Czy istnieje $E(X)$?
11. Niech X_1, \dots, X_n będą zmiennymi losowymi niezależnymi o rozkładzie Poissona z parametrami odpowiednio $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Korzystając z własności funkcji charakterystycznych pokazać, że zmienna losowa $Y = X_1 + \dots + X_n$ ma rozkład Poissona.
12. Niech X i Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach normalnych standaryzowanych. Znaleźć rozkład zmiennej losowej $Z = X - Y$.