probabilistyka
matematyka, II stopień
lista 0

1. Rzucamy pięcioma symetrycznymi monetami. Zmienna losowa przyjmuje wartości równe ilości wyrzuconych orłów. Podać rozkład zmiennej losowej.

2. Niech $\Omega = \{0, 1, 2, 3\}$, $P(\{\omega\}) = \frac{1}{4}$ dla $\omega = 0, 1, 2, 3$. Definiujemy dwie zmienne losowe $X(\omega) = \sin \frac{\pi\omega}{2}$ oraz $Y(\omega) = \cos(\pi\omega)$. Znaleźć rozkłady i dystrybuanty zmiennych losowych X i Y. Obliczyć $P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = Y(\omega)\})$.

3. Z talii 52 kart wyciągamy 6 i takiemu losowaniu przypisujemy liczbę pików. Znaleźć rozkład określonej w ten sposób zmiennej losowej.

4. Funkcja
$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -1, \\ \frac{1}{4}, & -1 \le x < 1, \\ \frac{1}{2}, & 1 \le x < 2 \\ \frac{7}{8} & 2 \le x < 4 \\ 1 & x \ge 4. \end{cases}$$
jest dystrybuantą zmiennej losowej X. Wtedy (odpowiedzieć *tak* lub *nie*):
   a) $P(X \le 2) > P(X > 2)$;
   b) $W_X = \{-1, 1, 2, 3\}$;
   c) $P(X = 3) = \frac{7}{8}$;
   d) $P(X^2 - 1 = 0) = \frac{1}{2}$.

5. Z kwadratu $[0, 1]^2$ losujemy punkt (x, y). Zmienna losowa X przyjmuje wartości równe sumie współrzędnych wylosowanego punktu. Wyznaczyć rozkład zmiennej losowej X.

6. Wyznaczyć zbiór wszystkich trójek a, b i c, dla których funckja
$$F(t) = \begin{cases} at^2, & t < 0, \\ bt + c, & 0 \le t < 2, \\ 1, & t \ge 2 \end{cases}$$
jest
   a) dystrybuantą zmiennej losowej,
   b) dystrybuantą zmiennej losowej o rozkładzie dyskretnym,
   c) dystrybuantą zmiennej losowej o rozkładzie ciągłym.

7. Dla jakiego a funkcja $f(x) = (ax - 1)\mathbf{1}_{[0,1]}(x)$ jest gęstością rozkładu zmiennej losowej?

8. Dla jakiego c funkcja określona wzorem
$$f(x) = \begin{cases} c \cos x & x \in \langle 0, \frac{\pi}{4} \rangle \\ 0 & x \notin \langle 0, \frac{\pi}{4} \rangle \end{cases}$$
jest gęstością rozkładu pewnej zmiennej losowej? Nie licząc całki podać ile wynosi prawdopodobieństwo w punkcie $\frac{\pi}{4}$. Odpowiedź uzasadnij. Wyznacz dystrybuantę tej zmiennej losowej.

9. Funkcje $f_i, i = 1, 2, 3$ są gęstościami rozkładów jednostajnych na odcinkach $(i - 1, i)$. Wtedy są gęstościami także funkcje (odpowiedzieć *tak* lub *nie*):
   a) $f_1 + f_2 + f_3$,
   b) $f_2 \cdot f_3$,
   c) $|f_3 - f_1|$,
   d) $\frac{1}{2}f_1 + \frac{1}{2}f_2$,
   e) $\max(f_1, f_2)$.

10. Wiemy, że zmienna losowa X ma rozkład wykładniczy z parametrem $\lambda > 0$ i $P(X < 2) = \frac{3}{4}$. Obliczyć λ.

11. Zmienna losowa X ma rozkład wykładniczy z parametrem $\lambda = 1$. Oblicz prawdopodobieństwo:

    a) $P(\{X < 3\})$
    b) $P(\{X > 2\})$
    c) $P(\{|X| < 1\})$

12. Zmienna losowa ma rozkład N(0,1). Oblicz prawdopodobieństwo:

    a) $P(\{X > 0\})$
    b) $P(\{X > 2\})$
    c) $P(\{|X| < 1\})$
    d) $P(\{|X| > 1\})$
    e) $P(\{0 < X < 3\})$
    f) $P(\{-1 < X < 3\})$

13. Zmienna losowa ma rozkład N(1,2). Oblicz prawdopodobieństwo:

    a) $P(\{|X| > 3\})$
    b) $P(\{X^2 \leq \frac{3}{4} + X\})$