probabilistyka
matematyka, II stopień
lista 4

1. Dwuwymiarowa zmienna losowa (X, Y) ma rozkład o gęstości:

$$f(x,y) = \frac{1}{300\pi} exp\{-\frac{1}{2}[\frac{(x-30)^2}{100} + \frac{(y-40)^2}{225}]\}$$

Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że suma kwadratów standaryzowanych zmiennych losowych X i Y nie przekracza 1.

2. Dwuwymiarowa zmienna losowa (X, Y) ma rozkład normalny o gęstości:

$$f(x,y) = c \cdot exp[-\frac{2}{3}(x^2 - \frac{1}{2}xy + \frac{1}{4}y^2)].$$

Wyznaczyć stałą c, współczynnik korelacji, oraz macierz kowariancji.

3. Wykazać, że wariancja iloczynu dwóch niezależnych zmiennych losowych X i Y wyraża się wzorem

$$D^2(XY) = \sigma_1^2\sigma_2^2 + \alpha_1^2\sigma_2^2 + \alpha_2^2\sigma_1^2,$$

gdzie $\alpha_1 = E(X),\ \alpha_2 = E(Y),\ \sigma_1^2 = D^2(X),\ \sigma_2^2 = D^2(Y)$.

4. Dwuwymiarowa zmienna losowa (X, Y) ma rozkład mormalny o parametrach $m_1 = 2,\ m_2 = 1,\ \sigma_1 = 1,5,\ \sigma_2 = 0,8,\ \rho = 0,6$. Podać gęstość tego rozkładu.

5. Trójwymiarowa zmienna losowa (X, Y, Z) ma rozkład normalny z zerowym wektorem wartości przeciętnych i macierzy kowariancji:

$$M = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Napisać gęstość tego rozkładu.

6. Trójwymiarowa zmienna losowa (X, Y, Z) ma rozkład o gęstości

$$f(x,y,z) = \frac{1}{4\pi\sqrt{6\pi}} exp\{-\frac{1}{12}[6x^2 + 4(y-1)^2 + (z+2)^2 - 2(y-1)(z+2)]\}$$

- wyznaczyć macierz kowariancji;
- obliczyć $E(XY)$;
- obliczyć $E[Y(Y-Z)]$.