

probabilistyka
matematyka, II stopień
lista 6

1. Podać przykład ciągu zmiennych losowych określonych na tej samej przestrzeni Ω , zbieżnego według rozkładu, który nie jest zbieżny według prawdopodobieństwa.
2. Wykazać, że jeśli X, X_1, X_2, \dots są zmiennymi losowymi, t.ż. $X_n \xrightarrow{D} X$, gdzie $P(X = c) = 1, c \in R$, to $X_n \xrightarrow{P} c$.
3. Udowodnić, że jeśli $X_n \xrightarrow{D} X, a, b \in R$, to $aX_n + b \xrightarrow{D} aX + b$.
4. Udowodnić, że jeśli $X_n \xrightarrow{D} X, Y_n \xrightarrow{D} 0$, to $X_n + Y_n \xrightarrow{D} X$.
5. Udowodnić, że jeśli $X_n \xrightarrow{D} X, Y_n \xrightarrow{D} c$, to $X_n + Y_n \xrightarrow{D} X + c$.
6. Podać przykład zmiennych losowych X_n, Y_n, X, Y t.ż. $X_n \xrightarrow{D} X$ oraz $Y_n \xrightarrow{D} Y$, ale nieprawda, że $X_n + Y_n \xrightarrow{D} X + Y$.
7. Udowodnić, że jeśli $X_n \xrightarrow{D} X, Y_n \xrightarrow{D} 0$, to $X_n Y_n \xrightarrow{D} 0$.
8. Udowodnić, że jeśli $X_n \xrightarrow{D} X, Y_n \xrightarrow{D} a$, to $X_n Y_n \xrightarrow{D} aX$.
9. (**owad i mrówki**) Owad składa jaja zgodnie z rozkładem Poissona z parametrem a . W nocy mrówki kradną mu jaja: szansa, że dane jajo zostanie ukradzione, wynosi q . Następnego dnia historia się powtarza (liczba złożonych jaj ma ten sam rozkład, co poprzedniego dnia i jest niezależna od przeszłości), itd. Jaki jest rozkład graniczny liczby jaj ocalonych przed mrówkami?
10. Niech $X_n \xrightarrow{D} X, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, a$ - punkt ciągłości dystrybuanty F_X . Udowodnić, że $\lim_n F_{X_n}(a_n) = F(a)$.
11. Dane są dwa ciągi zmiennych losowych $(X_n), (Y_n)$, gdzie $X_n \sim \text{Exp}(\frac{1}{n})$ natomiast $Y_n \sim U[0, \frac{1}{n}]$. Zbadać zbieżność tych ciągów według rozkładu.
12. Dane są dwa ciągi zmiennych losowych $(X_n), (Y_n)$, gdzie $X_n \sim \text{Exp}(\sqrt{n})$ natomiast $P(Y_n = 0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{n}, P(Y_n = 1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{n}$. Zbadać zbieżność tych ciągów według rozkładu.
13. Niech (X_n) będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie $U[0, 1]$ oraz $Y_n = n \cdot \min(X_1, \dots, X_n)$. Czy istnieje taka zmienna losowa Y , że $Y_n \xrightarrow{D} Y$?
14. Niech X_n będzie ciągiem zmiennych losowych takich, że $X_n \sim N(0, \sigma_n)$. Zakładając, że $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = 0$ zbadać zbieżność tego ciągu zmiennych losowych według rozkładu.
15. Dane są dwa ciągi zmiennych losowych $(X_n), (Y_n)$, gdzie $X_n \sim \text{Cauchy}(0, \frac{1}{n})$ natomiast $Y_n \sim \text{Cauchy}(0, n)$. Zbadać zbieżność tych ciągów według rozkładu.