

**przykładowe zadania z rachunku prawdopodobieństwa
studium podyplomowe matematyki**

1. Z talii 52 kart losujemy 5 kart bez zwracania. Obliczyć prawdopodobieństwo, że
 - a) dokładnie trzy karty będą pikami;
 - b) wśród wylosowanych kart będą piki i kiery.
2. Rzucamy trzema kostkami do gry. Oblicz prawdopodobieństwo, że suma wyrzuconych oczek jest liczbą parzystą, jeśli wiadomo, że iloczyn wyrzuconych oczek jest liczbą parzystą.
3. Na odcinku $[0, 1]$ umieszczamy losowo i niezależnie dwa punkty x i y . Niech A będzie zdarzeniem polegającym na tym, że $x^2 + y^2 \leq 1$, natomiast B zdarzeniem polegającym na tym, że $x < y$. Czy A i B są niezależne?
4. Wiemy, że 95% produkcji jest dobrej jakości, a pozostałe 5% jest złej jakości. Kontrola przepuszcza przedmioty dobrej jakości z prawdopodobieństwem 0,98, a przedmioty złej jakości z prawdopodobieństwem 0,05. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że przedmiot przepuszczony przez kontrolę będzie dobrej jakości.

5. Zmienna losowa X ma rozkład prawdopodobieństwa podany w tabeli:

| | | | | | | |
|-------|-----|-----|-----|-----|---|-----|
| x_i | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 |
| p_i | 0,1 | 0,2 | 0,2 | 0,3 | p | 0,1 |

Wyznaczyć :

- dystrybuantę zmiennej losowej X ;
 - $E(X)$ oraz $D^2(X)$;
 - medianę oraz dominantę;
 - rozkład zmiennej losowej $Y = X^2$.
6. Zmienna losowa X ma gęstość

$$f(x) = \begin{cases} ae^x & \text{dla } x \in [0, \ln 3], \\ 0 & \text{dla } x \notin [0, \ln 3] \end{cases}$$

Obliczyć:

- parametr a ;
 - dystrybuantę zmiennej losowej X ;
 - $E(X)$ oraz $D^2(X)$;
 - prawdopodobieństwa $P(X < 0)$, $P(X < 1)$, $P(0,5 < X < 1)$.
7. Zmienna losowa ma rozkład $N(\frac{3}{2}, 2)$. Oblicz prawdopodobieństwo $P(\{|X| > 2\})$.
8. Stosując twierdzenie Moivre'a-Laplace'a obliczyć prawdopodobieństwo tego, że w 800 niezależnych próbach ilość sukcesów będzie większa niż 150, a mniejsza niż 250, jeśli prawdopodobieństwo sukcesu w każdej próbie jest równe $\frac{1}{4}$.

9. Towarzystwo ubezpieczeniowe pobiera od klienta składkę w wysokości 35 złotych miesięcznie, a w zamian klient dostaje od towarzystwa zwrot kosztów leczenia. Prawdopodobieństwo, że w danym miesiącu klient otrzyma wypłatę w wysokości 500, 1000 lub 4000 złotych wynosi odpowiednio $1/50$, $1/100$, $1/4000$. Towarzystwo zawarło 1000 takich umów. Jakie jest prawdopodobieństwo, że towarzystwo w danym miesiącu
- wykaże zysk?
 - poniesie stratę w wysokości co najmniej 1000 złotych?
 - Jaka powinna być minimalna liczba klientów, by prawdopodobieństwo, że towarzystwo poniesie stratę było mniejsze niż 0,005?

zagadnienia teoretyczne z rachunku prawdopodobieństwa

- schematy kombinatoryczne
- przestrzeń probabilistyczna
- aksjomaty prawdopodobieństwa
- własności prawdopodobieństwa
- klasyczna definicja prawdopodobieństwa
- prawdopodobieństwo warunkowe
- wzór na prawdopodobieństwo całkowite oraz wzór Bayesa
- niezależność zdarzeń
- schemat Bernoulliego
- definicja zmiennej losowej
- definicja rozkładu prawdopodobieństwa zmiennej losowej
- definicja dystrybuanty oraz jej własności
- definicja gęstości oraz jej własności
- rozkład dwupunktowy, Bernoulliego, geometryczny, jednostajny na odcinku, wykładniczy, normalny
- wartość oczekiwana oraz wariancja i ich własności
- niezależność zmiennych losowych
- prawa wielkich liczb
- centralne twierdzenie graniczne