Równania różniczkowe
Pomoc dydaktyczna 1

Równanie pierwszego rzędu oraz pierwszego stopnia można zapisać w postaci

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \tag{1}$$

jest to tak zwana *postać normalna* równania rózniczkowego.

Definicja 1. *Obszarem określoności* równania (1) nazywamy obszar płaszczyzny Oxy w którym funkcja $f(x, y)$ jest jednoznaczna i ciągła, przy tym jeśli $f(x, y)$ jest nieokreślona w pewnym punkcie (x_0, y_0), ale istnieje skończona granica tej funkcji, gdy $(x, y) \to (x_0, y_0)$, to przedłużamy funkcję $f(x, y)$ w punkcie (x_0, y_0) pod względem ciągłości. Ponadto do obszaru określoności będziemy dołączali równiez punkty w których funkcja $f(x, y)$ dąży do nieskończoności.

Definicja 2. Rozwiązaniem równania (1) będziemy nazywać każdą funkcję $y = y(x)$, która zzmienia to równanie w tożsamość. Ponadto, jeśli funkcja stała $x = a$ jest rozwiązaniem równania odwróconego

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x, y)}$$

to będziemy również ją traktować jako rozwiązaniem równania (1), jest to tak zwane *rozwiązanie dołączone*.

Poprzez pełną *analizę równania różniczkowego* (1) będziemy rozumieli następującą listę czynności

1. określenie obszaru oznaczoności równania
2. określenie obszaru istnienia rozwiązania zagadnienia Cauchy'ego
3. określenie obszaru istnienia i jednoznaczności rozwiązania zagadnienia Cauchy'ego
4. wyznaczenie lini osobliwych
5. wyznaczenie izoklin, narysowanie izoklin $y' = 0, \pm 1, \infty$
6. wyznaczenie obszaru wzrostu i malenia rozwiązania
7. wyznaczenie lini ekstremów
8. ustalenie kierunku wypukłości i wyznaczenie lini punktów przegięcia
9. wykonanie szkicu rodziny krzywych całkowych
10. scałkowanie równania
11. zbadnie zachowania krzywych całkowych w otoczeniu linii osobliwych, na brzegu obszaru określoności równania i w nieskończoności