Równania różniczkowe
Pomoc dydaktyczna 2

Definicja 1. *Zagadnieniem Cauchy'ego*, lub *zagdanieniem początkowym* dla równania

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \tag{1}$$

nazywamy następujące zadanie: wśród wszystkich rozwiązań równania (1) znaleźć takie rozwiązanie $y = y(x)$ w którym funkcja $y(x)$ przybiera zadaną wartość liczbową y_0 przy zadanej wartości liczbowej x_0 zmiennej niezależnej x:

$$y(x_0) = y_0$$

gdzie x_0 i y_0 są z góry zadanymi liczbami tak, że rozwiązanie spełnia warunek

$$y = y_0 \quad \text{dla} \quad x = x_0. \tag{2}$$

Liczby x_0, y_0 noszą nazwę *danych początkowych*, a warunek (2) - warunku początkowego rozwiązania $y = y(x)$.

Warunek wystarczający istnienia rozwiązania zagadnienia Cauchy'ego.

Twierdzenie 1 (Twierdzenie Peano)**.** Jeżeli punkt (x_0, y_0) leży w obszarze oznaczoności i ciągłości prawej strony równania (1) Zagadnienie Cauchy'ego dla tego równania z danymi początkowymi x_0, y_0 posiada rozwiązanie.

Warunek wystarczający istnienia i jednoznaczności rozwiązania zagadnienia Cauchy'ego.

Twierdzenie 2 (Twierdzenie Picarda)**.** Załóżmy, że funkcja $f(x, y)$ występująca z prawej strony równania (1) jest ciągła w pewnym otoczeniu Ω punktu (x_0, y_0) oraz, że na tym otoczeniu $f(x, y)$ ma ograniczoną pochodną cząstkową względem argumentu y, tj.

$$\left|\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\right| \leq K, \qquad (x, y) \in \Omega. \tag{3}$$

Wtedy równanie (1) posiada dokładnie jedno rozwiązanie $y = y(x)$ spełniające warunek początkowy (2).

Uwaga. Jeśli pochodna cząstkowa $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ jest ciągła w pewnym otoczeniu punktu (x_0, y_0), to istnieje otoczenie Ω punktu (x_0, y_0) takie, że warunek (3) jest spełniony.