Analiza matematyczna III
Lista 1 (różniczkowanie funkcji wielu zmiennych)

Zad 1. Zbadać różniczkowalność następujących funkcji

a) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy(x+y)}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0), \end{cases}$

b) $f(x) = x \sin \|x\|, \ x \in \mathbb{R}^n,$

c) $f(x,y) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0), \end{cases}$

d) $f(x,y,z) = \sqrt{|xy| + |yz| + |xz|}$

e) $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2},$

f) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0), \end{cases}$

g) $f(x,y) = x\sqrt{x^2+y^2},$

h) $f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$

Zad 2. Obliczyć wskazane pochodne cząstkowe

a) $\dfrac{\partial^{10} f}{\partial x^2 \partial y^8}$, gdzie $f(x,y) = e^{xy}$, *b)* $\dfrac{\partial^5 f}{\partial z^2 \partial x \partial y^2}$, gdzie $f(x,y,z) = \ln(x^2+2y-z)$,

c) $\dfrac{\partial^{m+n} f}{\partial x^m \partial y^n}$, gdzie $f(x,y) = (1+x)^m(1+y)^n$.

Zad 3. Pokazać, że funkcja f określona następująco $f(x,y) = xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ dla $(x,y) \neq (0,0)$ oraz $f(0,0) = (0,0)$ posiada w punkcie $(0,0)$ pochodne cząstkowe mieszane drugiego rzędu, ale pochodne te nie są identyczne. Czy funkcja ta jest klasy C^2 na $\mathbb{R}^2$?

Zad 4. Wyznaczyć macierze Jacobiego danych odwzorowan

a) $f(x,y) = (\ln xy, \operatorname{tg}\dfrac{x}{y})$, *b)* $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = (3x_2^2 - 5x_4, \ln(1+x_3^2+x_4^2), \sqrt{1+x_1^2}, x_2^5)$,

c) $f(x,y,z) = \left(\dfrac{x}{y}\right)^z$, *d)* $f(x,y,z) = ((x+y)^z, x^{y^z})$.

Zad 5. Oblicz macierz Jacobiego superpozycji $g \circ f$ dwóch odwzorowań, gdzie :

a) $f : \mathbb{R}^1 \ni x \longmapsto (x, \ln(1+x)) \in \mathbb{R}^2$, $g : \mathbb{R}^2 \ni (x,y) \longmapsto (\sin x, e^{x+y}, 1) \in \mathbb{R}^3$,

b) $f : \mathbb{R}^3 \ni (x,y,z) \longmapsto (x-y-z) \in \mathbb{R}^1$, $g : \mathbb{R}^1 \ni x \longmapsto (2^x, 1+x^2, 0) \in \mathbb{R}^3$

c) $f : \mathbb{R}^2 \ni (x,y) \longmapsto (xy, x+y, \sin xy) \in \mathbb{R}^3$, $g : \mathbb{R}^3 \ni (x,y,z) \longmapsto (x+y+z, -y) \in \mathbb{R}^2$

Zad 6. Wyznaczyć różniczki zupełne

a) du, gdzie $u(x) = \|x\|x$, $x \in \mathbb{R}^n$

b) d^2u, gdzie $u(x,y,z) = \frac{z}{x+y^2}$

c) d^3u, gdzie $u(x,y) = x^3+y^3-3xy(x-y)$,