Analiza matematyczna III
Lista 10

Zad 1. Wykazać, że dla $z, w \in \mathbb{C}$ zachodzi

a) $\overline{\overline{z}} = z$,
b) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$,
c) $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$,
d) $\operatorname{Re} z = \frac{z+\overline{z}}{2}$,
e) $\operatorname{Im} z = \frac{z-\overline{z}}{2i}$,
f) $z \cdot \overline{z} = (\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2$.

Zad 2. Przedstawić liczbę zespoloną w postaci biegunowej (trygonometrycznej).

Zad 3. Podać interpretację geometryczną mnożenia dwu liczb zespolonych. Wyciągnąć stąd następujące wnioski:

1) $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$, dla dowolnych $z, w \in \mathbb{C}$,

2) $|z|^2 = z\overline{z}$, dla każdego $z \in \mathbb{C}$,

3) wzór Moivre'a: $z^n = |z|^n \big(\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)\big)$, gdzie $\varphi = \arg z$,

4) istnieje dokładnie n pierwiastków n-tego stopnia z liczby zespolonej $a \neq 0$.

Zad 4. Wyznaczyć sumę oraz iloczyn wszystkich pierwiastków n-tego stopnia z jedynki.

Zad 5. Korzystając z własności modułu i sprzężenia liczb zespolonych wykazać, że dla dowolnych $z, w \in \mathbb{C}$ zachodzi: a) $|z+w| \leq |z|+|w|$ (*nierowność trójkąta*), b) $|z+w|^2+|z-w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2)$ (*tożsamość równoległoboku*).

Zad 6. Znaleźć $|z|$ oraz $arg\, z$, gdy:

a) $z = (1 + i)(2 + i)(3 + i)$, b) $z = \frac{1+i}{3-i}$, c) $z = e^{i\varphi} + 1$, $\varphi \in (-\pi.\pi)$, d) $z = \frac{(1+i)^n}{(1-i)^n}$.

Zad 7. Przedstawić w postaci trygonometrycznej liczby:

a) 5, *b)* $\sqrt{2}i$, *c)* $-1 - \sqrt{3}i$, *d)* $\frac{5+15i}{3-i}$, *e)* $(\frac{1+i}{1+i\sqrt{3}})^{2008}$

Zad 8. Wyznaczyć wszystkie liczby zespolone dane symbolami

a) $\sqrt[4]{1}$, *b)* $\sqrt[4]{-2}$, *c)* $\sqrt[3]{1+i}$, *d)* $\sqrt[3]{-2+2i}$, *e)* $\sqrt[3]{\sqrt{2}i}$

Zad 9. Narysuj na płaszczyźnie zespolonej zbiory:

$$A = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) \geq 0\}, \qquad B = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\},$$

$$C = \{z \in \mathbb{C} : |z - i - 1| \leq 2\}, \qquad D = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \arg(z) < \frac{1}{4}\pi \wedge |z| < 3\},$$

$$E = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1 \wedge |z| < 2\}, \qquad F = \{z \in \mathbb{C} : |z - 2 + 3i| = 2\},$$

$$G = \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \arg(z) \leq \frac{\pi}{3}\}, \qquad H = \{z \in \mathbb{C} : |z - 5| = |z + 1|\},$$

$$I = \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \arg(iz) \leq \pi\}, \qquad J = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z^2) > 2 \text{ oraz } \operatorname{Im}(z^2) = 1\}.$$

Zad 10. Wyznaczyć parametryczne równanie:

a) prostej przechodzącej przez punkty odpowiadające liczbom zespolonym z_1, z_2,

b) okręgu o środku z_0 i promieniu r.

Zad 11. Wyznaczyć obraz kwadratu o wierzchołkach w punktach $z_1 = 0$, $z_2 = 1$, $z_3 = 1 + i$, $z_4 = i$, przy odwzorowaniu:

a) $f(z) = iz$, b) $f(z) = 2iz$, c) $f(z) = 2iz + i$, d) $f(z) = z^2$.

Zad 12. Znaleźć, przy odwzorowaniu $f(z) = \frac{1}{z^2}$ obraz zbioru ograniczonego przez krzywe: $|z| = \frac{1}{2}, |z| = 1, x = 0, y = x$ dla $x \geq 0$.