# Analiza matematyczna III
## Lista 11

**Zad 1.** Wykazać, że dla dowolnych $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$:
a) $e^z \neq 0$, b) $e^{z_1} = e^{z_2} \iff z_1 = z_2 + 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$, c) $e^{z_1+z_2} = e^z_1 e^{z_2}$.

**Zad 2.** Narysować obraz zbioru $\{z \in \mathbb{C} : 0 < Imz < \pi \wedge Rez < 0\}$ przy odwzorowaniu $f(z) = e^z$.

**Zad 3.** Wykazać, że: a) $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$, $\mathrm{ch}^2 z - \mathrm{sh}^2 z = 1$,
b) $\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$, $\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 - \cos z_1 \sin z_2$,
c) $\sin iz = i\mathrm{sh}z$, $\cos iz = \mathrm{ch}z$.
Na podstawie a), b), c) wyznaczyć $|\cos z|$, $|\sin z|$.

**Zad 4.** Wyznaczyć miejsca zerowe funkcji $\sin z$, $\cos z$, $\mathrm{sh}z$, $\mathrm{ch}z$.

**Zad 5.** Niech $f(z)$ będzie ustaloną gałęzią logarytmu $\ln z$. Znaleźć $f(D)$, gdzie

$$D = \{z \in \mathbb{C} : e^{-1} < |z| \leq e\} \setminus \{z \in \mathbb{C} : Im(z) = 0 \text{ i } Re(z) \leq 0\}.$$

**Zad 6.** Niech $f(z) = \sin z$. Znaleźć $f(A)$, gdzie $A = \left\{z \in \mathbb{C} : Re(z) \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\right\}$.

**Zad 7.** Zbadać czy ciąg jest ograniczony:

a) $z_n = e^{in}$, b) $z_n = \frac{(2-i)^n}{n}$, c) $z_n = (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i)^n$ d) $z_n = \frac{3n+1}{(-1)^n n+2i}$, e) $dz_n = \frac{in+1}{n+1}$.

**Zad 8.** Znaleźć granicę ciągu:

a) $z_n = (1 + \frac{i\pi}{n})^n$, b) $z_n = \frac{n!}{(ni)^n}$, c) $z_n = \frac{2^n+i}{2^n-i}$, d) $z_n = \frac{in+1}{n+i}$, e) $z_n = \frac{1}{2^n} + i\frac{1}{3^n}$.

**Zad 9.** Zbadać zbieżność szeregów:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n}$, b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}+3i}{(i\sqrt{n})^3}$, c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+i}{n^3+2i}$.

**Zad 10.** Zbadać bezwzględną zbieżność szeregów:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+i)^n}{2^n}$, b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in}}{n^2}$, c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i\sqrt{n}+1}{n}$.

**Zad 11.** Wyznaczyć część rzeczywistą i część urojoną liczby $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, $z \in \mathbb{C}$.

**Zad 12.** Znaleźć sumy szeregów: $\sum_{n=0}^{\infty} r^n \cos nt$, $\sum_{n=0}^{\infty} r^n \sin nt$, gdzie $r, t \in \mathbb{R}$, $0 \leq r < 1$.

**Zad 13.** Wyznaczyć promienie zbieżności szeregów potęgowych:

$$a)\ \sum_{n=0}^{\infty} nz^n, \qquad b)\ \sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^{2^n}, \qquad c)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n} z^n, \qquad d)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n^n} z^{n^2}.$$

**Zad 14.** Dla jakich $c \in \mathbb{C}$ funkcje $f_1(z) = \begin{cases} \frac{Rez}{z}, & z \neq 0 \\ c, & z = 0 \end{cases}$, $f_2(z) = \begin{cases} \frac{Imz^2}{z^2} & z \neq 0 \\ c, & z = 0 \end{cases}$ są ciągłe w zerze.

**Zad 15.** Wyznaczyć z definicji pochodną funkcji $f(z) = z^n$, $n \in \mathbb{N}$, oraz $f(z) = \frac{1}{z}$.

**Zad 16.** Zbadać różniczkowalność w sensie zespolonym funkcji $\overline{z}$, $|z|$, $|z|^2$.

**Zad 17.** Zbadać holomorficzność funkcji

$$a)\ f(z) = \mathrm{Re}\, z \cdot z, \qquad b)\ f(z) = z^2, \qquad c)\ f(z) = \frac{1}{z}, \qquad d)\ f(z) = xy + iy,$$

$$e)\ f(z) = e^x \cos y + ie^x \sin y, \qquad f)\ f(z) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y.$$

**Zad 18.** Zbadać różniczkowalność funkcji $f(z) = z \cdot \sin|z|$.