**Analiza matematyczna III**
**Lista 12**

**Zad 1.** Znaleźć jawną postać $f$ wiedząc, że funkcja $f$ jest holomorficzna oraz

$$a)\ \operatorname{Re} f(z) = \operatorname{Re} z + 1,\ \ f(0) = 1 + i, \qquad b)\ \operatorname{Re} f(z) = \operatorname{Re} z \cdot \operatorname{Im} z,\ \ f(0) = 0.$$

**Zad 2.** Czy istnieje funkcja holomorficzna $f = u + iv$, taka, że

$$a)\ u = v, \qquad b)\ u = x^2 + y^2, \qquad c)\ v = \sin x, \qquad d)\ u = e^x - e^y.$$

**Zad 3.** Wykazać, że jeśli funkcja holomorficzna przyjmuje tylko wartości rzeczywiste, to jest stała.

**Zad 4.** Wykazać, że jeśli funkcja $f$ i funkcja do niej sprzężona $\overline{f}$ są różniczkowalne w sensie zespolonym w punkcie $z_0 \in \mathbb{C}$, to $f'(z_0) = 0$.

**Zad 5.** Jeśli $f = u+iv$ oraz $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, to $u$ i $v$ można traktować jako funkcje zmiennych $r$, $\varphi$. Pokazać, że $u$ i $v$ spełniają warunki Cauchy-Riemmana wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \varphi}, \qquad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi}.$$

**Zad 6.** Wykazać, że jeśli $u$ jest częścią rzeczywistą pewnej funkcji holomorficznej, to $u$ jest funkcją harmoniczną, czyli spełnia równanie Laplace'a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Na odwrót pokazać, że każda funkcja harmoniczna jest częścią rzeczywistą pewnej funkcji holomorficznej. Jak rzecz ma się dla części urojonej funkcji holomorficznej?

**Zad 7.** Sprawdzić, czy podane funkcje są harmoniczne, jeśli tak, to znaleźć funkcje harmoniczne z nimi sprzężone: $a)\ u = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$, $\ b)\ u = 2x - x^3 + 3xy^2$, $\ c)\ u = \cos\cos y$, $\ d)\ u = \frac{y}{x^2+y^2}$

**Zad 8.** Niech $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Obliczyć całkę $\int_\gamma \frac{1}{\xi}\, d\xi$, gdzie $\gamma$ jest dowolnie wybraną krzywą nieprzechodzącą przez zero i łączącą punkty 1 i $z$.

**Zad 9.** Obliczyć całki:

$$\text{a)} \int_{|z-1|=2} z - 1 + \frac{1}{(z-1)^2}\, dz, \qquad \text{b)} \int_{|z-z_0|=r} \overline{z}\, dz, \qquad \text{c)} \int_{[1+i,1-i]} z e^{z^2}\, dz.$$

**Zad 10.** Obliczyć całki $\displaystyle\int_K f(z)\, dz$, gdzie

a) $f(z) = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$, K jest pierwszą ćwiartką okręgu o promieniu R i środku w (0,0) skierowaną przeciwnie do ruchu wskazówek zegara,

b) $f(z) = \cos z$, K to łuk półokręgu o promieniu 1 łaczący punkty $z_0 = -i, z_1 = i$,

c) $f(z) = \sin(\overline{z})$, K to łamana zamknięta o wierzchołkach $z = 0, z = \frac{\pi}{2}, z = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}i$,

d) $f(z) = ze^z$, K jest łukiem elipsy $x^2 + 2y^2 = 1$ leżącym w pierwszej ćwiartce łączącym punkty $z_0 = 1, z_1 = \frac{i}{\sqrt{2}}$,

e) $f(z) = \frac{z}{z^2+1}$, K jest łukiem paraboli $y = x^2$ łączacym punkty $z_0 = 0, z_1 = 1 + i$,

f) $f(z) = e^{\overline{z}}$, K jest odcinkiem o początku $z = 1$ i końcu $z = i$,

g) $f(z) = Re(z)$, K jest częścią krzywej łączącej punkt $(0,0)$ z punktem $(1,1)$,

h) $f(z) = z + \frac{1}{z^2}$, $K = \{z \in \mathbb{C} : |z-1| = 2\}$.