Analiza matematyczna III
Lista 13

Zad 1. Niech $f(z) = Rez$ i niech Γ będzie
a) odcinkiem o początku i i końcu $-i$, b) lewym półokręgiem łączącym punkty $-i$ i i,
c) prawym półokręgiem łączącym punkty $-i$ i i.

Obliczyć całkę $\int_\Gamma f(z)\,dz$.

Zad 2. Obliczyć całki $\displaystyle\int_K f(z)\ dz$, gdzie

a) $f(z) = \frac{e^z}{z-1}$, $\quad K = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 2\}$,

b) $f(z) = \frac{\sin(\frac{\pi}{6}iz)}{(z^2+4)^3}$, K jest elipsą $x^2 + \frac{(y-2)^2}{4} = 1$,

c) $f(z) = \frac{e^z \sin(z)}{1+z^2}$, K jest okręgiem $|z - (2+i)| = \sqrt{2}$,

d) $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$, K jest elipsą $x^2 + 4y^2 = 1$,

e) $f(z) = \frac{z\sin(\pi z)}{z^4-1}$, K jest łamaną zamkniętą łączącą punkty $0, -2+i, -2-i$,

f) $f(z) = \frac{e^z}{z^4}$, K jest łamaną skierowaną dodatnio o wierzchołkach $1, i, -1, -i$,

g) $f(z) = \frac{e^{\pi z}}{(z+i)^2}$, K jest okręgiem $|z| = 2$ skierowanym dodatnio,

h) $f(z) = \frac{\sinh z}{(z+2i)^2}$, K jest okręgiem $|z| = 3$ skierowanym ujemnie.

Zad 3. Wyznaczyć residua w skończonych punktach osobliwych izolowanych następujących funkcji:

$$\text{a) } f(z) = \frac{1}{(z-1)(z+1)}, \quad \text{b) } f(z) = \frac{z^2-2z}{(z-1)(z+1)}, \quad \text{c) } f(z) = \frac{e^z}{(z-1)^2(z+1)}.$$

$$\text{d) } f(x) = \frac{1}{z-z^3}, \quad \text{e) } f(x) = \frac{z^5}{(1-z)^2}, \quad \text{f) } f(x) = \frac{e^z}{1+z^2}, \quad \text{g) } f(x) = \frac{1-e^z}{1+e^z}.$$

Zad 4. Obliczyć za pomocą residuów całki z Zadania 2.

Zad 5. Obliczyć całki:

a) $\displaystyle\int_{|z-3|<15} \frac{z^2+1}{z-2}\,dz$,

b) $\displaystyle\int_{C(-2006i,2006)} \frac{z^2}{(z^2+1)^2}\,dz$.

c) $\displaystyle\int_\Gamma \frac{\sin^3(z-i)}{(z-i)^3}\,dz$, gdzie Γ jest łamaną zamkniętą łączą punkty $-1, 2i, 1$,

d) $\displaystyle\int_{C(0,r)} \frac{dz}{(z-a)(z-b)}$, gdzie $|a| < |b|$ i $r \neq |a|, |b|$,

e) $\int_\Gamma \frac{dz}{1+z^2}$, gdzie Γ jest elipsą $x^2 + 4y^2 = 16$,

f) $\int_\Gamma \frac{e^z \cos z}{(1+z^2)} \sin z\,dz$, gdzie Γ jest okręgiem $C(1+i, \sqrt{2})$,

g) $\displaystyle\int_{\Gamma)} \frac{1}{1-z^8}\,dz$, gdzie Γ jest łamaną zamkniętą łączą punkty $2, 2i, -2, -2i$,

h) $\displaystyle\int_{C(1,2)} z^2 e^{-\frac{1}{z}}\,dz$,

i) $\displaystyle\int_{C(0,1)} \sin\left(\frac{2}{z}\right)\,dz$.