Analiza matematyczna III
Lista 2

Zad 1 (konstrukcja funkcji gładkiej o zwartym nośniku)**.** Niech

$$f_{a,b}(x) = \begin{cases} e^{-(x-a)^2} e^{-(x-b)^2}, & x \in (a,b), \\ 0, & x \notin (a,b). \end{cases}$$

a) Pokazać, że $f_{a,b} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest funkcją gładką (klasy C^∞), która jest dodatnia na przedziale (a,b) i zeruje się poza nim.

b) Pokazać, że dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje funkcja gładka $g : \mathbb{R} \to [0,1]$ taka, że $g(x) = 0$ dla $x \leq 0$ oraz $g(x) = 1$ dla $x \geq \varepsilon$. *Wskazówka:* Położyć $g(x) = \int_0^x f_{0,\varepsilon}(t)\,dt / \int_0^\varepsilon f_{0,\varepsilon}(t)\,dt$.

c) Dla $a \in \mathbb{R}^n$ zdefiniujmy funkcję $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ wzorem

$$g(x) = f_{-\varepsilon,\varepsilon}(x_1 - a_1) \cdot ... \cdot f_{-\varepsilon,\varepsilon}(x_n - a_n).$$

Pokazać, że g jest funkcją gładką, dodatnią na prostopadłościanie

$$(a_1 - \varepsilon, a_1 + \varepsilon) \times ... \times (a_n - \varepsilon, a_n + \varepsilon)$$

i zerującą się poza nim.

d) Niech $K \subset U$, gdzie K jest zbiorem zwartym a U zbiorem otwartym w $\mathbb{R}^n$. Pokazać, że istnieje nieujemna funkcja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dodatnia na K i zerująca się poza U.

e) Pokazać, że w podpunkcie d) funkcję f można wybrać tak, aby $f : U \to [0,1]$ oraz $f(x) = 1$ dla $x \in K$. *Wskazówka:* Jeśli dla funkcji f z podpunktu d) mamy $f(x) \geq \varepsilon$ dla $x \in K$, rozważyć $g \circ f$, gdzie g jest funkcją z podpunktu b).

Zad 2. Obliczyć całkę podwójną w prostokącie:

a) $\displaystyle\iint_{[0,2]\times[0,6]} xy(x+y)\,dx\,dy,$ *b)* $\displaystyle\iint_B \frac{dx\,dy}{(x+y+1)^2},$ gdzie $B = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 1 \leq y \leq 2\},$

c) $\displaystyle\iint_{[-\sqrt{\pi},0]\times[0,\pi]} x\cos(x^2+y)\,dx\,dy,$ *d)* $\displaystyle\iint_D e^{x+y}+1\,dx\,dy,$ gdzie $D = \{(x,y) : |x|, |y| < 1\},$

Zad 3. Obliczyć całki podwójne $\iint_G f(x,y)dx\,dy$ w obszarze G ograniczonym przez krzywe dane równaniami:

	f	G		f	G
a)	$x+y$	$x=0,\ y=0,\ x+y=1$	f)	$3x^2y$	$y^3=x^2,\ y=1$
b)	$(x+y+1)^2$	$x=0,\ x+y=1,\ x-y=1$	g)	1	$y=\frac{2}{x}$ dla $x>0$, $y=2x$, $y=\frac{2}{x}$
c)	xy	$x=0,\ y=x^2,\ y=0,\ x=1$	h)	$2x$	$y=x^2,\ y=\frac{x^2}{4}$ dla $x\geq 0$, $y=1$
d)	$\frac{x^2}{y^2}$	$xy=1,\ x=2,\ y=x$	i)	$2x$	$y^2=x+2,\ y=-x$
e)	1	$y^2=x+4,\ y^2=-x+4$	j)	$2\lvert x\rvert y$	$y=x^2,\ y=2+\lvert x\rvert$

Zad 4. Obliczyć pole obszaru ograniczonego krzywymi

a)	$y=x^2,\ y=\frac{x^2}{4},\ x=2$	c)	$y=\sin x, y=\cos x, x\in[\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}]$	e)	$xy=4,\ y=x,\ x=4$
b)	$y=\ln x, y=x-1, y=-1$	d)	$y=x^2,\ x^2+y^2=2$ dla $y\geq 0$	f)	$xy=1,\ xy=8,\ y=x^2,\ y=\frac{x^2}{8}$

Zad 5. Zamienić kolejność całkowania w całce iterowanej

a)	$\int_0^2\int_0^x f(x,y)\,dy\,dx$	c)	$\int_0^2\int_{\sqrt{2y}}^{\sqrt{8-y^2}} f(x,y)\,dx\,dy$	e)	$\int_0^1\int_{y-1}^{y^2} f(x,y)\,dx\,dy$
b)	$\int_0^1\int_x^{2-x^2} f(x,y)\,dy\,dx$	d)	$\int_{-2}^0\int_{y^2-4}^0 f(x,y)\,dx\,dy$	f)	$\int_0^1\int_{x^2}^{2-x} f(x,y)\,dy\,dx$