Analiza matematyczna III
Lista 4

Zad 1 (zachowanie objętości przy odwzorowaniu liniowym). a) Niech $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ będzie odwzorowaniem liniowym jednego z poniższych typów

$$\begin{cases} g(e_i) = e_i, & i \neq j, \\ g(e_j) = ae_j, \end{cases} \qquad \begin{cases} g(e_i) = e_i, & i \neq j, \\ g(e_j) = e_j + e_k, \end{cases} \qquad \begin{cases} g(e_k) = e_k, & k \neq i, j, \\ g(e_i) = e_j, \\ g(e_j) = e_i, \end{cases}$$

gdzie e_i, $i = 1, ..., n$ są wektorami standardowej bazy w $\mathbb{R}^n$. Pokazać, że jeżeli U jest n-wymiarowym prosotopadłościanem, to objętość $g(U)$ wynosi $|\det g| \cdot |U|$.

b) Pokazać, że iloczyn $|\det g| \cdot |U|$ jest objętością zbioru $g(U)$ dla dowolnego odwzorowania liniowego $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Zad 2. Obliczyć całkę potrójną $\iiint\limits_V z\, dx\, dy\, dz$ w obszarze normalnym V danym relacjami:

a)	$0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x,\ 0 \le z \le x + y$	g)	$z \le x \le y,\ z \le y \le 1,\ 0 \le z \le 1$
b)	$0 \le x \le 1,\ x \le y \le 1,\ x \le z \le y$	h)	$-1 \le x \le 0,\ x \le y \le 0,\ 0 \le z \le 1$
c)	$-1 \le x \le 0,\ 0 \le y \le 1,\ x \le z \le 0$	i)	$z \le x \le y,\ 0 \le y \le 1,\ 0 \le z \le y$
d)	$0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x,\ y \le z \le x$	j)	$0 \le x \le z,\ z - x \le y \le z + x,\ 0 \le z \le 1$
e)	$0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x,\ x - y \le z \le x + y$	k)	$0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x,\ 0 \le z \le x$
f)	$z \le x \le y,\ 0 \le y \le 1,\ 0 \le z \le y$	l)	$x^2 + y^2 \le 1,\ \lvert z\rvert \le 1$

Zad 3. Obliczyć całkę

$$\iiint\limits_V 2z\, dx\, dy\, dz, \qquad V = \{(x, y) \in G : \sqrt{2 - x} \le z \le \sqrt{6 + y},$$

gdzie G oznacza:

a) kwadrat o wierzchołkach $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 1)$
b) trójkąt o wierzchołkach $(0, 0)$, $(0, 2)$, $(2, 0)$
c) trójkąt o wierzchołkach $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(-2, 2)$
d) trójkąt o wierzchołkach $(0, 0)$, $(2, -2)$, $(-2, 2)$
e) koło o środku $(0, 0)$ i promieniu 1
f) koło o środku $(0, 1)$ i promieniu 1
g) część wspólną koła e) i f)

Zad 4. Obliczyć całkę potrójną $\iiint\limits_V f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$ w obszarze normalnym V ograniczonym przez podane powierzchnie:

	f	V		f	V
a)	$x + y$	$y = \sqrt{x},\ x + z = 1,\ y = 0,\ z = 0$	e)	$x^2 + y^2$	$x = 0,\ y = 0\ z = 0,\ y = a,\ x + z = a$
b)	xyz	$x = a,\ y = x\ z = 0,\ y = z,$	f)	$2yz$	$y = \sqrt{x},\ y = 2\sqrt{x},\ x + z = 6,\ z = 0$
c)	1	$y = \frac{x^2}{2},\ z = 4 - y^2,\ x = 0,\ z = 0$	g)	1	$x = 0,\ y = 0,\ z = 0,\ 2x + y = 4,\ z = 4 - x^2$
d)	z	$y = x^2,\ z = 0,\ z = 1,\ y = 1$	h)	y	$y = 0,\ y = \sqrt{ax},\ z = a - x,\ z = 2(a - x)$

Zad 5. Obliczyć za pomocą współrzędnych cylindrycznych lub sferycznych całkę potrójną $\iiint\limits_V f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$ w podanym obszarze V:

	f	V		f	V
a)	$\sqrt{x^2 + y^2}$	$x^2 + y^2 \le a^2,\ 0 \le z \le h$	f)	z	$x^2 + y^2 + z^2 \le a^2,\ \ z \ge 0$
b)	$x^2 + y^2 + z^2$	$x^2 + y^2 + z^2 \le a^2,$	g)	z	$x^2 + y^2 \le z \le \sqrt{x^2 + y^2}$
c)	$x^2 + y^2$	$x^2 + y^2 \le a^2,\ \frac{h}{a}\sqrt{x^2 + y^2} \le z \le h$	h)	1	$x^2 + y^2 + z^2 \le a^2,\ \ z \ge b$
d)	z^2	$x^2 + y^2 + z^2 \le a^2$	i)	1	$b^2 \le x^2 + y^2 + z^2 \le a^2,\ z \ge \sqrt{x^2 + y^2}$
e)	$\frac{1}{x^2+y^2+z^2}$	$b^2 \le x^2 + y^2 + z^2 \le a^2$	j)	1	$x^2 + y^2 + z^2 \le 2az,\ z \le \sqrt{x^2 + y^2}$