

# Analiza matematyczna III

## Lista 5

**Zad 1.** Obliczyć całki krzywoliniowe skierowane

- a)  $\int_{L_i} (x + y) dx + y dy$ , gdzie  $L_1$  jest łukiem  $\widehat{AB}$  cykloidy  $x = a(t - \sin t)$ ,  $y = a(1 - \cos t)$ , a  $L_2$  jest odcinkiem  $\overline{AB}$ , gdzie  $A = (0, 0)$ ,  $B = (2a\pi, 0)$ .
- b)  $\int_{L_i} (x^2 + 2xy) dx + (y - xy) dy$ , gdzie  $L_1$  jest odcinkiem  $\overline{AC}$ , a  $L_2$  łamaną  $\widehat{ABC}$ , gdzie  $A = (0, 0)$ ,  $B = (1, 0)$ ,  $C = (2, 2)$ .
- c)  $\int_{L_i} x^2 dy - 2y dx$ , gdzie  $L_1$  jest półokręgiem  $\widehat{AB}$ , a  $L_2$  odcinkiem  $\overline{AB}$ , gdzie  $A = (0, 0)$ ,  $B = (1, 0)$ .
- d)  $\int_L (x^2 + y^2) dx + (x^2 - y^2) dy$ , gdzie  $L$  jest łamaną  $y = 1 - |1 - x|$ ,  $0 \leq x \leq 2$  skierowaną zgodnie ze wzrostem  $x$ .
- e)  $\int_L x dx + y dy + z dz$  oraz  $\int_L y dx + z dy + x dz$ , gdzie  $L = \{x = 2t, y = t^2, z = 1 - t : 0 \leq t \leq 1\}$  jest krzywą skierowaną zgodnie ze wzrostem  $t$ .

**Zad 2.** Dane jest pole sił  $P(x, y) = x^3 - y$ ,  $Q(x, y) = xy$  na płaszczyźnie. Wyznaczyć jaką pracę trzeba wykonać, pokonując siły pola wzdłuż paraboli  $y^2 = 8x$  od punktu  $A = (0, 0)$  do  $B = (2, 4)$ .

**Zad 3.** Dane jest pole sił  $F = (P, Q, R)$ , gdzie

$$P(x, y, z) = \frac{yz}{x}, \quad Q(x, y, z) = \frac{xz}{y}, \quad R(x, y, z) = \frac{xy}{z}.$$

Wyznaczyć jaką pracę trzeba wykonać, pokonując siły pola wzdłuż drogi po łuku krzywej  $\begin{cases} y = x^2 \\ z = x^3 \end{cases}$  od punktu  $A = (0, 0, 0)$  do  $B = (1, 1, 1)$ .

**Zad 4.** W pewnym polu grawitacyjnym składowe sił wzdłuż osi układu są następujące

$$P(x, y, z) = k \frac{x}{r^3}, \quad Q(x, y, z) = k \frac{y}{r^3}, \quad R(x, y, z) = k \frac{z}{r^3},$$

gdzie  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ , a  $k$  jest pewnym współczynnikiem. Wyznaczyć pracę, jaką trzeba wykonać, aby przesunąć punkt materialny o masie jednostkowej wzdłuż drogi  $x = \cos t$ ,  $y = 1$ ,  $z = \sin t$  od punktu  $M = (1, 1, 0)$  do punktu  $N = (0, 1, 1)$ .

**Zad 5.** Obliczyć całkę niewłaściwą  $\int_0^\infty e^{-x^2} dx$ .

**Zad 6.** Obliczyć całkę krzywoliniową nieskierowaną  $\int_l f dl$  po łuku  $l$  na płaszczyźnie  $Oxy$  lub w przestrzeni  $Oxyz$ :

	$f$	$l$		$f$	$l$
a)	$\frac{6y}{x}$	$y = \frac{x^2}{2}, 0 \leq x \leq 1$	f)	$xy$	$x = a \cosh t, y = a \sinh t, 0 \leq t \leq 1$
b)	$2y \cos x$	$y = \sin x, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$	g)	$x^2 + y^2 + z^2$	$x = a \cos t, y = a \sin t, z = bt, 0 \leq t \leq 2\pi$
c)	$y^2 \sqrt{1+x}$	$y = \frac{2}{3}x\sqrt{x}, 0 \leq x \leq 3$	h)	$xyz$	$x = e^t, y = e^{-t}, z = t\sqrt{2}, 0 \leq t \leq 1$
d)	$ x + y $	$y = x, -1 \leq x \leq 1$	i)	$ y $	$x = \cos t, y = \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi$
e)	$3ye^x$	$y = e^x, 0 \leq x \leq \ln 3$	j)	$\frac{xz}{1+2y}$	$x = t, y = t^2, z = \frac{2}{3}t^3, 0 \leq t \leq 1$