Analiza matematyczna III
Lista 6

Zad 1. Jaki warunek muszą spełniać współczynniki liczby a_{ij}, $i,j = 1,...,n$, aby funkcja $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ dana wzorem $f(x,y) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_iy_j$ była dwuliniową formą antysymetryczną?

Zad 2. Wykazać, że na to, by forma k-liniowa A była antysymetryczna wystarcza, by przy każdym $i = 1,...,k-1$ z tego, że $h^{(i)} = h^{(i+1)}$ wynikało, że $A(h^{(1)},...,h^{(k)}) = 0$

Zad 3. Obliczyć iloczyn zewnętrzny $\alpha \wedge \beta$, gdzie

$$a)\ \alpha = 2dx_1 \wedge dx_3 - dx_2 \wedge dx_3, \quad \beta = dx_1 - 3dx_2 + 2dx_3 + dx_4,$$

$b)$ $\alpha = 2dx_2 \wedge dx_3$, $\beta = dx_2 \wedge dx_1 + 2dx_3 \wedge dx_4$, $c)$ $\alpha = dx_1 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4$, $\beta = \alpha$.

Zad 4. Wykazać, że

a) Jeśli $\alpha \in \bigwedge^k V^*$, $\omega \in V^*$ i $\beta = \alpha \wedge \omega$, to $\omega \wedge \beta = 0$.

b) Jeśli $\beta \in \bigwedge^{k+1} V^*$ oraz $0 \neq \omega \in V^*$ są takie, że $\beta \wedge \omega = 0$, to istnieje $\alpha \in \bigwedge^k V^*$ taka, że $\beta = \alpha \wedge \omega$.

Zad 5. Niech $\alpha = \varphi_1 \wedge \varphi_2 + \varphi_3 \wedge \varphi_4 + ... + \varphi_{2n-1} \wedge \varphi_{2n}$, gdzie $\varphi_1, ...\varphi_{2n} \in V^*$ są liniowo niezależne. Obliczyć

$$\alpha^{\wedge n} = \underbrace{\alpha \wedge \alpha \wedge ... \wedge \alpha}_{n \text{ razy}}.$$

Zad 6. Niech $\{e_1,...,e_n\}$ będzie bazą ortonormalną w $\mathbb{R}^n$. Pokazać, że istnieje jedyna forma $\omega \in \bigwedge^n(\mathbb{R}^{n*})$ taka, że $\omega(e_1,...,e_n) = 1$ (forma objętości).

a) Wykazać, że jeżeli $\{f_1,...,f_n\}$ jest inną bazą ortonormalną, to $\omega(f_1,...,f_n) = \pm 1$, przy czym znak $+$ jest w przypadku bazy zgodnie zorientowanej z bazą $\{e_1,...,e_n\}$, znak $-$, gdy orientacje są przeciwne

b) Udowodnić, że jeżeli $v_1,...,v_n \in \mathbb{R}^n$, to

$$|\omega(v_1,...,v_n)| = \sqrt{\det(g_{ij})}$$

gdzie $g_{ij} = \langle v_i | v_j \rangle$.

c) Dla $n = 3$ wyprowadzić, że

$$|\omega(v,w)| = \sqrt{\|v\|^2\|w\|^2 - \langle v|w \rangle^2} = |v \times w|.$$

Zad 7. Wyznaczyć $T^*\omega$, jeśli

a) $T : \mathbb{R}^1 \ni x \to (y_1,y_2,y_3) = (x, x^3, \cos x) \in \mathbb{R}^3$, $\overset{2}{\omega}(y) = y_1 e^{(-y_2-y_3^2)}\, dy_1 \wedge dy_3$.

b) $T : \mathbb{R}^2 \ni (x_1,x_2) \to (y_1,y_2,y_3) = (1, 2^{x_1x_2}, x_1x_2) \in \mathbb{R}^3$, $\overset{2}{\omega}(y) = y_2\, dy_2 \wedge dy_3 + dy_1 \wedge dy_3$.

c) $T : \mathbb{R}^3 \ni (x_1,x_2,x_3) \to (x_1 + x_2 + x_3 + 2) \in \mathbb{R}^1$, $\overset{1}{\omega}(y) = (1 + y^2)\, dy$.

d) $T : \mathbb{R}^n \ni x \to Ax + x_0$, gdzie A jest niesobliwą macierzą $n \times n$, $\overset{k}{\omega}(x) = f(x)\, dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_k}$, gdzie $f \in C^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

e) $T : (0,\infty) \times (0,2\pi) \ni (r,\varphi) \to (x,y) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi) \in \mathbb{R}^2 \setminus [0,\infty) \times \{0\}$, $\overset{1}{\omega}(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2}\, dx - \frac{x}{x^2+y^2}\, dy$.