Analiza matematyczna III
Lista 7

Zad 1. Niech $S = \{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in U\}$, gdzie f jest funkcją klasy C^1 na zbiorze otwartym $U \subset \mathbb{R}^2$, oraz niech $\omega = P\,dy \wedge dz + Q\,dz \wedge dx + R\,dx \wedge dy$ będzie 2-formą określoną na płacie S. Sprawdzić słuszność wzoru

$$\int_S \omega = \iint\limits_U R_1(x,y) - P_1(x,y)\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - Q_1(x,y)\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dxdy,$$

gdzie $P_1(x, y) = P(x, y, f(x, y))$ oraz analogicznie dla funkcji Q_1, R_1.

Zad 2. Obliczyć $\int_{S_k} \overset{k}{\omega}$ dla następujących form $\overset{k}{\omega}$ oraz k-łańcuchów S_k zadanych parametrycznie $\Phi : P^k \to S_k$, gdzie

a)	$\overset{0}{\omega}(x) = x$	$P^0 = \{0\}$	$\Phi(0) = 2$
b)	$\overset{1}{\omega}(x) = (1-x)\,dx$	$P^1 = [0, \frac{\pi}{2}]$	$\Phi(t) = \sin t$
c)	$\overset{0}{\omega}(x,y) = x + y$	$P^0 = \{0\}$	$\Phi(0) = (1, 2)$
d)	$\overset{1}{\omega}(x,y) = dx + x\,dy$	$P^1 = [0, 1]$	$\Phi(t) = (1+t, t^2)$
e)	$\overset{2}{\omega}(x,y) = xy\,dx \wedge dy$	$P^2 = [1, 2] \times [0, 2\pi]$	$\Phi(t_1, t_2) = (2 + t_1 \cos t_2, t_1 \sin t_2)$
f)	$\overset{1}{\omega}(x,y,z) = dx + dy + dz$	$P^1 = [\pi, 3\pi]$	$\Phi(t) = (2\cos^2 t, 5, 1 + e^{-t})$
g)	$\overset{2}{\omega}(x,y,z) = x\,dx \wedge dy + dx \wedge dz$	$P^2 = [0, 2\pi] \times [0, \frac{\pi}{2}]$	$\Phi(t_1, t_2) = (\sin t_1 \cos t_2, \sin t_1 \sin t_2, \cos t_2)$
h)	$\overset{3}{\omega}(x,y,z) = dx \wedge dy \wedge dz$	$P^3 = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 3]$	$\Phi(t_1, t_2, t_3) = (t_1 t_2, t_1, t_1 t_3)$

Zad 3. Obliczyć $\int_s \omega$ dla następujących form ω oraz łańcuchów s

a) $\omega = x_1^2\,dx_2 \wedge dx_3 + x_2^2\,dx_3 \wedge dx_1 + x_3^2\,dx_1 \wedge dx_2$, s jest zewnętrzną stroną $[0, 1]^3$.

b) $\omega = (x_1^3 + x_2^3)\,dx_2 \wedge dx_3 + dx_3 \wedge dx_1 + dx_1 \wedge dx_2$, s jest zewnętrzną stroną powierzchni ograniczającej obszar $\{(x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_2^2 < 1,\ |x_3| < 1\}$.

c) $\omega = dx_2 \wedge dx_3 + dx_3 \wedge dx_1 + \sin x_3 dx_1 \wedge dx_2$, s ogranicza obszar $x_1^2 + x_2^2 < 1 - |x_3|$, $|x_3| < 1$ i jest skierowana do wewnątrz.

d) $\omega = x_2\,dx_1 - x_1\,dx_2 + dx_3$, s jest krzywą $(0, 2\pi] \ni t \mapsto ((1 + \cos t)\cos t, (1 + \cos t)\sin t, 1 + \cos t) \in \mathbb{R}^3$.

e) $\omega = x_1^2\,dx_1 + x_2^2\,dx_2 + x_3^2\,dx_3$, s jest krzywą $(0, 2\pi] \ni t \mapsto (\cos t, \sin t, \sin^2 t) \in \mathbb{R}^3$.

Zad 4. Obliczyć pochodną zewnętrzną następujących form na $\mathbb{R}^3$

a) $\omega(x, y, z) = \cos(x + y)$,

b) $\omega(x, y, z) = \frac{1}{1+x^2}\,dy + \sqrt{1 + e^{xz}}\,dx$,

c) $\omega(x, y, z) = \sin(xy)dy \wedge dz + e^{x^2-y^2-z^2} dx \wedge dz$,

d) $\omega(x, y, z) = \sin(xyz)dx \wedge dy \wedge dz$.

Zad 5. Sprawdzić twierdzenie Stokesa na $\mathbb{R}^2$, biorąc:

a) $\overset{0}{\omega}(x, y) = \frac{1}{x^2+y^2}$, $\quad s_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1,\ y \geq 0\}$.

b) $\overset{1}{\omega}(x, y) = \frac{1}{1+y}dx + dy$, $\quad s_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq x,\ 1 \leq x + y \leq 5\}$.

c) $\overset{1}{\omega}(x, y) = 2x\,dy + dx$, $\quad s_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x - 3| \leq 3,\ |y| \leq 2,\ x^2 + 4y^2 \geq 4\}$.

Zad 6. Sprawdzić twierdzenie Stokesa w $\mathbb{R}^3$, biorąc:

a) $\overset{0}{\omega} = \log(xyz)$, s_1 - krzywa $[1, 2] \ni t \mapsto (t + 1, t^4, 4t)$.

b) $\overset{1}{\omega} = e^{x+y+z}dx + dz$, $\quad s_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq |x| \leq 2,\ 1 \leq |y| \leq 2,\ y + z = 1\}$.

c) $\overset{2}{\omega} = x^2dy \wedge dz + y^2dx \wedge dz + z^2dx \wedge dy$, $\quad s_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1,\ 0 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2}\}$.