Analiza matematyczna III
Lista 8

Zad 1. Wyrazić objętość bryły przez całkę po jej powierzchni.

Zad 2. Obliczyć całkę z 2-formy $(x+y)dy\wedge dz+(y+z)dz\wedge dx+(1-2z)dx\wedge dy$ na półsferze $S=\{(x,y,z): x^2+y^2+z^2=1,\ z>0\}$ (zorientowanej dowolnie).

Zad 3. Obliczyć całkę z $(k-1)$-formy $x_j dx_1\wedge dx_2\wedge\ldots\wedge\widehat{dx_i}\wedge\ldots dx_n$ na sferze $S=\{x\in\mathbb{R}^k : \|x\|=1\}$ (zorientowanej dowolnie).

Zad 4. Znaleźć $\int_M \omega$, gdzie M jest zadana parametrycznie:

a) $[0,1]\times[0,1]\ni(u,v)\mapsto\phi(u,v)=(u+v,u-v,uv)\in M\subset\mathbb{R}^3$ oraz $\omega=xdx\wedge dz+ydx\wedge dz$.

b) $[0,1]\times[0,1]\ni(u,v)\mapsto\psi(u,v)=(\cos u,\sin u,\cos v,\sin v)\in M\subset\mathbb{R}^4$ oraz $\omega=x_2x_4dx_1\wedge dx_3+x_2x_3dx_4\wedge dx_1+x_1x_4dx_3\wedge dx_2+x_1x_3dx_2\wedge dx_4$.

Zad 5. Całkę z formy $z(dy\wedge dz+dz\wedge dx+dx\wedge dy)$ obliczyć po części powierzchni sfery jednostkowej, zawartej w pierwszym oktancie $x>0$, $y>0$, $z>0$, dwoma sposobami (tw. Stokes'a i parametryzacja).

Zad 6. Obliczyć $\int_M \omega$, gdzie

a) $M=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x=y^2+z^2,\ y^2+z^2\le 1\}$ jest powierzchnią zorientowaną wektorem normalnym skierowanym do wewnątrz oraz $\omega=xdy\wedge dz+ydz\wedge dx+zdx\wedge dy$.

b) M jest sferą jednostkową (zorientowaną dowolnie) oraz $\omega=ydz\wedge dx+xzdx\wedge dy$.

c) M jest brzegiem obszaru $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2\le 1,\ z^2\le x^2+y^2\}$ oraz $\omega=dy\wedge dz+dz\wedge dx+z^2dx\wedge dy$.

d) $M=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2=1,\ 0\le z\le 1\}$ jest powierzchnią zorientowaną na zewnątrz oraz $\omega=(x+y)dy\wedge dz+(z+y)dz\wedge dx+(x+y)dx\wedge dy$.

e) M jest powierzchnią wyciętą walcem $x^2+y^2=2rx$ ze sfery $x^2+y^2+z^2=2Rx$, $R>r$, $z>0$, $\omega=d\varphi$, $\varphi=(y^2+z^2)dx+(z^2+x^2)dy+(x^2+y^2)dz$.

Zad 7. Obliczyć $\int_s(\vec{F}|\vec{n})d\sigma$, gdzie

a) $\vec{F}(x,y,z)=(zxe^{xy},-zye^{xy},z)$ oraz $s=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2=5,\ z\ge 0\}$ zorientowana na zewnątrz.

b) $\vec{F}(x,y,z)=(x^2,y^2,z^2)$ oraz s jest brzegiem obszaru $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2\le 1,\ 0\le z\le\sqrt{x^2+y^2}\}$ zorientowanym do wewnątrz.

c) $\vec{F}(x,y,z)=(\frac{y}{r},1-\frac{x}{r},0)$, $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $s=\{(x,y,z) : x^2+y^2+(z+1)^2=1,\ z\le\frac{1}{\sqrt{2}}\}$ zorientowana na zewnątrz.

d) $\vec{F}(x,y,z)=(x,0,3)$ oraz s jest brzegiem obszaru danego parametrycznie

$$x=(2+r\cos\theta)\cos\phi,\quad y=(2+r\cos\theta)\sin\phi,\quad z=r\sin\theta,\quad (r,\theta,\phi)\in[0,1]\times[0,2\pi)\times[0,2\pi)$$

e) $\vec{F}(x,y,z)=(x,y,z)$ oraz s jest brzegiem obszaru $\{(x,y,z) : z(1+x^2+y^2)\le 2,\ 4x^2+4y^2\le(1+z)^2,\ z\ge 0\}$ zorientowanym na zewnątrz.

f) $\vec{F}=\mathrm{grad}\varphi$, gdzie $\varphi=\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{r}+\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{r}+\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{r}$, $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, oraz $s=\{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2=1,\ z\ge 0\}$.