Analiza matematyczna III
Lista 9

Zad 1. Obliczyć całkę z formy $\frac{1}{x^2+y^2}(xdy - ydx)$ po okręgu o promieniu r i środku a) w zerze, b) w punkcie (r, r).

Zad 2. Obliczyć całkę z formy $\frac{xdx+ydy}{x^2+y^2}$ wzdłuż drogi łączej punkt $(1, 0)$ z punktem $(6, 8)$ nie przechodzącej przez początek układu współrzędnych.

Zad 3. Obliczyć pracę jaką trzeba wykonać, aby pokonać pole sił $(\frac{x}{(x-y)^2}, \frac{-y}{(x-y)^2})$ przenosząc punkt materialny z $(1, 0)$ do $(2, 1)$ po dordze nie przecinającej $y = x$.

Zad 4. Obliczyć pracę jaką wykona punkt materialny pokonując siły pola $\vec{F} = (\frac{x}{x+y+z}, \frac{y}{x+y+z}, \frac{z}{x+y+z})$ wzdłuż drogi łączącej $(1, 0, 0)$ i $(0, 0, e)$ i nie przecinającej płaszczyzny $x + y + z = 0$.

Zad 5. Obliczyć: a) $\mathrm{div}(\mathrm{grad}\,\Phi)$, gdzie $\Phi : \mathbb{R}^n \supset U \to \mathbb{R}$; b) $\mathrm{rot}(\mathrm{rot}(\vec{a}\times\vec{v}))$, gdzie $\vec{v} = (x, y, z)$, $\vec{a} = const \in \mathbb{R}^3$; c) $\mathrm{div}(\vec{u} \times \vec{v})$.

Zad 6. Przyjmijmy dla funkcji $\Phi : U \to \mathbb{R}$ i pola wektorowego $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3) : U \to \mathbb{R}^3$, gdzie $U \subset \mathbb{R}^3$, następujące oznaczenia

$$\overset{0}{\omega}_\Phi = \Phi, \quad \overset{1}{\omega}_{\vec{F}} = F_1dx + F_2dy + F_3dz, \quad \overset{2}{\omega}_{\vec{F}} = F_1\, dx\wedge dy + F_2\, dz\wedge dy + F_3\, dy\wedge dz, \quad \overset{3}{\omega}_\Phi = \Phi dx\wedge dy\wedge dz.$$

a) Wykazać, że $d\,\overset{0}{\omega}_\Phi = \overset{1}{\omega}_{\mathrm{grad}\,\Phi}$, $d\,\overset{1}{\omega}_{\vec{F}} = \overset{2}{\omega}_{\mathrm{rot}\,\vec{F}}$, $d\,\overset{2}{\omega}_{\vec{F}} = \overset{3}{\omega}_{\mathrm{div}\,\vec{F}}$.

b) Wyciągnąć stąd wniosek, że $\mathrm{rot}(\mathrm{grad}\,\Phi)) = 0$ oraz $\mathrm{div}(\mathrm{rot}\,\vec{\Phi})) = 0$, tzn. pole będące gradientem funkcji jest bezwirowe, a pole będące roatacją pewnego pola jest bezźródłowe.

c) Na odwrót jeśli, U jest zbiorem jednospójnym, oraz $\vec{G} : U \to \mathbb{R}^3$ polem wektorowym, to

- $\mathrm{rot}(\vec{G}) = 0 \implies \vec{G} = \mathrm{grad}\,\Phi$ dla pewnej funkcji $\Phi : U \to \mathbb{R}$ zwanej potencjałem skalarnym pola $\vec{G}$, oraz
- $\mathrm{div}(\vec{G}) = 0 \implies \vec{G} = \mathrm{rot}\,\vec{F}$ dla pewnego pola $\vec{F} : U \to \mathbb{R}^3$ zwanego potencjałem wektorowym pola $\vec{G}$.

Zad 7. Zbadać istnienie potencjałów skalarnych lub wektorowych dla pól wektorowych. W przypadkach, gdy odpowiedź jest pozytywna podać potencjały.

a) $\vec{F}(x, y, z) = (x^2 - 2yz, y^2 - 2xz, z^2 - 2xy), \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

b) $\vec{F}(x, y, z) = (x^2, y^2, -2(x + y)z), \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

c) $\vec{F}(x, y, z) = (1 - \frac{1}{y} - \frac{1}{z}, \frac{x}{z} + \frac{x}{y^2}, \frac{-xy}{z^2}), \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$.

d) $\vec{F}(x, y, z) = (yz, zx, xy), \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

e) $\vec{F}(x, y, z) = \frac{1}{(x+y)^2+z^2}(x + y - z, x + y - z, x + y + z)$ dla $(x + y)^2 + z^2 \neq 0$.

f) $\vec{F}(x, y, z) = \frac{1}{r^3}(x, y, z)$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$.

g) $\vec{F}(x, y, z) = (\frac{1}{x+y} + 1, \frac{1}{x+y}, 1), \quad x + y \neq 0$.

Zad 8. Dana jest forma $\alpha = ydx - xdy + dz$ na $\mathbb{R}^3$ i funkcje $u, v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Pokazać, że jeśli $d(\alpha - vdu) = 0$, to u i v nie zależą od z.