

**Teoria miary i całki**  
Zagadnienia na egzamin 03.02.2011

1. Wady całki Riemanna.
2. Struktury na rodzinach zbiorów: pierścienie, algebry,  $\sigma$ -pierścienie,  $\sigma$ -algebry oraz półpierścienie (związki między nimi i przykłady).
3. Struktury rodzin generowanych: istnienie i definicja pierścieni, algebr,  $\sigma$ -pierścieni i  $\sigma$ -algebr generowanych przez rodziny zbiorów, postać pierścienia generowanego przez półpierścienia.
4. Miara: definicja i przykłady, monotoniczność miary, przedłużanie miary z półpierścienia na pierścień.
5. Miary  $\sigma$ -addytywne:  $\sigma$ -addytywność,  $\sigma$ -subaddytywność, ciągłość (kryterium  $\sigma$ -addytywności),  $\sigma$ -addytywność długości.
6. Lebesguesowskie przedłużenie miary, krok 1 (miara zewnętrzna): definicja miary zewnętrznej  $\mu^*$  i rola  $\sigma$ -addytywności  $\mu$ ,  $\sigma$ -subaddytywność  $\mu^*$ , półmetryka zadana przez  $\mu^*$ .
7. Lebesguesowskie przedłużenie miary, krok 2 (zbiory mierzalne): definicja i kryterium mierzalności zbioru, algebra zbiorów mierzalnych, zbiory miary zero i miary zupełne.
8. Lebesguesowskie przedłużenie miary, krok 3: addytywność i  $\sigma$ -addytywność miary zewnętrznej na algebrze zbiorów mierzalnych, definicja, podstawowe własności, minimalność oraz jednoznaczność miary Lebesgue'a.
9. Przedłużanie miar z pierścienia - miary  $\sigma$ -skończone i nieskończone: konstrukcja lebesguesowskiego przedłużenia miar  $\sigma$ -skończonych, definicje miary  $\sigma$ -skończonych i nieskończonych.
10. Miara Lebesgue'a na prostej: przykłady zbiorów mierzalnych w sensie Lebesgue'a, zbiór Cantora i jego własności, zbiory otwarte i gęste, przykład zbioru niemierzalnego.
11. Miary Lebesgue'a-Stieltjesa: charakteryzacja miar  $\sigma$ -addytywnych na półpierścieniu odcinków półotwartych, definicja miary Lebesgue'a-Stieltjesa.
12. Miary Lebesgue'a-Stieltjesa absolutnie ciągłe względem miary Lebesgue'a: definicja i przykłady funkcji absolutnie ciągłych, definicja i charakteryzacja miar absolutnie ciągłych, kryterium absolutnej ciągłości miar Lebesgue'a-Stieltjesa względem miary Lebesgue'a.
13. Miary znakowe (ładunki), rozkład Hahna-Jordana: definicja i przykłady, Tw. Hahna o rozkładzie dziedziny ładunku (bez dowodu), Tw. Jordana o rozkładzie ładunku na różnicę miar.
14. Konstrukcja całki Lebesgue'a dla funkcji ograniczonych.
15. Funkcje mierzalne: charakteryzacje mierzalności, przykłady.
16. Różne rodzaje zbieżności: zbieżność punktowa, jednostajna, prawie wszędzie, według miary oraz relacje między nimi (m.in. Tw. Jęgorowa, Riesz, wędrujący garb).
17. Całka Lebesgue'a, konstrukcja ogólna i podstawowe własności.
18. Twierdzenia o przejściu z granicą pod znak całki: absolutna ciągłość i  $\sigma$ -addytywność całki jako funkcji zbioru, tw. Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej, tw. Lebiego o zbieżności monotonicznej i jego zastosowania, lemat Fatou (tw. Fatou-Lebesgue'a).
19. Całka Lebesgue'a dla miar nieskończonych: definicja dla miar  $\sigma$ -nieskończonych oraz konstrukcja (poprzez tzw. stopniową komplikację) dla miar nieskończonych.
20. Twierdzenie Radona-Nikodyma: charakteryzacje ładunków absolutnie ciągłych względem miary, liniowa niezależność przestrzeni ładunków absolutnie ciągłych i osobliwych, twierdzenie Radona-Nikodyma.
21. Zastosowania twierdzenia Radona-Nikodyma: wzór Newtona-Leibniza, związek między całkami względem różnych miar, zamiana zmiennych w całce (w tym cofnięcia miary i abstrakcyjne twierdzenie o zamianie zmiennych).