

Teoria miary i całki
Zagadnienia na egzamin 11.02.2019

1. Wady całki Riemanna.
2. Struktury na rodzinach zbiorów: pierścienie, algebry, σ -pierścienie, σ -algebry oraz półpierścienie (związki między nimi i przykłady).
3. Struktury rodzin generowanych: istnienie i definicja pierścieni, algebr, σ -pierścieni i σ -algebr generowanych przez rodziny zbiorów, postać pierścienia generowanego przez półpierścień.
4. Funkcje addytywne: definicja i przykłady, monotoniczność, przedłużanie z półpierścienia na pierścień.
5. Miary: σ -addytywność, σ -subaddytywność, ciągłość (kryterium σ -addytywności), σ -addytywność długości.
6. Przedłużenie miary, krok 1 (miara zewnętrzna): definicja miary zewnętrznej μ^* zadanej przez μ i jej własności.
7. Przedłużenie miary, krok 2 (zbiory mierzalne): definicja i kryterium mierzalności zbioru, algebra zbiorów mierzalnych, zbiory miary zero i miary zupełne.
8. Przedłużenie miary, krok 3: addytywność i σ -addytywność miary zewnętrznej na algebrze zbiorów mierzalnych, definicja, podstawowe własności, minimalność oraz jednoznaczność miary Lebesgue'a.
9. Miara Lebesgue'a na prostej: przykłady zbiorów mierzalnych w sensie Lebesgue'a, zbiór Cantora i jego własności, przykład zbioru niemierzalnego.
10. Miary Lebesgue'a-Stieltjesa: charakteryzacja miar lokalnie skończonych na prostej euklidesowej, definicja miary Lebesgue'a-Stieltjesa.
11. Miary znakowe (ładunki), rozkład Hahna-Jordana: definicja i przykłady, Tw. Hahna o rozkładzie dziedziny ładunku (bez dowodu), Tw. Jordana o rozkładzie ładunku na różnicę miar.
12. Funkcje mierzalne: charakteryzacje mierzalności, przykłady.
13. Różne rodzaje zbieżności: zbieżność punktowa, jednostajna, prawie wszędzie, według miary oraz relacje między nimi (przykłady).
14. Całka Lebesgue'a, konstrukcja ogólna i podstawowe własności.
15. Twierdzenia o przejściu z granicą pod znak całki: absolutna ciągłość i σ -addytywność całki jako funkcji zbioru, tw. Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej, tw. Lebiego o zbieżności monotonicznej i jego zastosowania, lemat Fatou (tw. Fatou-Lebesgue'a).
16. Twierdzenie Radona-Nikodyma: charakteryzacje ładunków absolutnie ciągłych względem miary, liniowa niezależność przestrzeni ładunków absolutnie ciągłych i osobliwych, twierdzenie Radona-Nikodyma, pochodna Radona-Nikodyma.
17. Zastosowania twierdzenia Radona-Nikodyma: wzór Newtona-Leibniza, związek między całkami względem różnych miar, zamiana zmiennych w całce.
18. Miary produktowe: konstrukcja i istnienie miary produktowej, twierdzenie Fubinięgo, twierdzenie Tonellego.