

**Analiza funkcjonalna**  
Zagadnienia na egzamin 23.06.2021

1. Przestrzenie unormowane, charakteryzacje równoważności norm (dowód), równoważność norm w przestrzeniach skończenie wielowymiarowych (dowód).
2. Przestrzenie Banacha: zupełność domkniętych podprzestrzeni (dowód), uzupełnienie, zupełność przestrzeni skończenie wymiarowych (dowód), przykłady.
3. Przestrzenie funkcji ciągłych (ograniczone i znikających w nieskończoności): zupełność, zbieżność jednostajna, przestrzenie ciągów.
4. Przestrzenie  $L_p$ , dla  $p \in [1, \infty]$ : nierówność Höldera (dowód), nierówność Minkowskiego (dowód), zupełność, przestrzenie ciągów.
5. Operatory ograniczone: definicja i przykłady, ciągłość operatorów (dowód), norma operatora, przestrzeń operatorów ograniczonych (zupełność dowód) i przestrzeń dualna do przestrzeni Banacha.
6. Przestrzenie Hilberta: definicja, nierówność Schwartz'a (dowód), charakteryzacja jako przestrzeni Banacha spełniających tożsamość równoległoboku, przykłady.
7. Rzut ortogonalny: definicja, istnienie i jednoznaczność (dowód), operator rzutowania.
8. Bazy ortogonormalne: istnienie i charakteryzacje bazy ortonormalnej (dowód), charakteryzacja przestrzeni Hilberta jako przestrzeni  $\ell_2(I)$ , ośrodkowe przestrzenie Hilberta, wymiar przestrzeni Hilberta.
9. Operatory sprzężone: Twierdzenie o postaci funkcjonału liniowego i ograniczonego na przestrzeni Hilberta (dowód), istnienie i jednoznaczność operatora sprzężonego (dowód), własności sprzężenia (dowód), różne klasy operatorów zdefiniowanych za pomocą sprzężenia.
10. Twierdzenie Hahna-Banacha (dowód): związek między funkcjonałami nad  $\mathbb{R}$  i  $\mathbb{C}$  (dowód), wnioski z Twierdzenia Hahna-Banacha (dowód), przestrzenie refleksywne.
11. Przestrzenie dualne do klasycznych przestrzeni Banacha, refleksywność: przestrzenie dualne do przestrzeni  $L^p$  i  $C(M)$  (Twierdzenie Riesz'a).
12. Twierdzenie Banacha-Steinhaus'a (dowód): twierdzenie Baire'a, ograniczoność granicy punktowej operatora ograniczonego (dowód).
13. Słaba i \*-słaba topologia na przestrzeniach Banacha (orientacyjnie): definicje, przykłady, Twierdzenie Banacha-Alaoglu i wniosek dla przestrzeni refleksywnych.
14. Twierdzenie o operatorze otwartym (dowód): wnioski (dowód), Twierdzenie o wykresie domkniętym (dowód).
15. Algebry Banacha i elementy odwracalne: definicja algebry Banacha, Lemat Neumanna (dowód), otwartość zbioru elementów odwracalnych (dowód) i różniczkowalność operacji odwracania, przykłady
16. Widmo: definicja, podstawowe własności (dowód), wzór na promień spektralny (dowód), przykłady.