

**Analiza funkcjonalna**  
Zagadnienia na egzamin 30.06.2023

1. Przestrzenie unormowane i przestrzenie Banacha, zupełność domkniętych podprzestrzeni (dowód), uzupełnienie, zbieżność szeregów w przestrzeniach Banacha.
2. Charakteryzacje równoważności norm (dowód), równoważność norm w przestrzeniach skończenie wielowymiarowych (dowód) i wnioski (zupełność przestrzeni skończenie wymiarowych oraz automatyczna ograniczoność operatorów na takich przestrzeniach).
3. Przestrzenie funkcji ciągłych (ograniczonych i znikających w nieskończoności): zupełność, zbieżność jednostajna, przestrzenie ciągów.
4. Przestrzenie  $L^p$ , dla  $p \in [1, \infty]$ : nierówność Höldera (dowód), nierówność Minkowskiego (dowód), zupełność (dowód), przestrzenie ciągów.
5. Operatory ograniczone: definicja i przykłady, ciągłość operatorów (dowód), norma operatora, przestrzeń operatorów ograniczonych (zupełność dowód).
6. Przestrzenie Hilberta: definicja, nierówność Schwartz'a (dowód), charakteryzacja jako przestrzeni Banacha spełniających tożsamość równoległoboku, przykłady.
7. Rzut ortogonalny: definicja, istnienie i jednoznaczność (dowód), operator rzutowania.
8. Bazy ortogonalne: istnienie i charakteryzacja bazy ortonormalnej (dowód), charakteryzacja przestrzeni Hilberta jako przestrzeni  $\ell_2(I)$ , ośrodkowe przestrzenie Hilberta, wymiar przestrzeni Hilberta.
9. Operatory sprzężone: Twierdzenie o postaci funkcjonału liniowego i ograniczonego na przestrzeni Hilberta (dowód), istnienie i jednoznaczność operatora sprzężonego (dowód), własności sprzężenia (dowód), różne klasy operatorów zdefiniowanych za pomocą sprzężenia.
10. Twierdzenie Hahna-Banacha (dowód): związek między funkcjonałami nad  $\mathbb{R}$  i  $\mathbb{C}$  (dowód), wnioski z Twierdzenia Hahna-Banacha (dowód), pojęcie przestrzeni refleksywnej.
11. Przestrzenie dualne do przestrzeni Banacha: Przestrzeń dualna do przestrzeni  $L^p$ , przykłady przestrzeni refleksywnych i nierefleksywnych.
12. Twierdzenie Banacha-Steinhaus'a (dowód): twierdzenie Baire'a, ograniczoność granicy punktowej operatora ograniczonego (dowód). Słaba topologia i ograniczoność ciągu słabo zbieżnego, przykłady.
13. Twierdzenie o operatorze otwartym (dowód): wnioski (dowód), Twierdzenie o wykresie domkniętym (dowód).
14. Algebry Banacha: definicja i przykłady, ujedynkowanie algebry, zanurzenie w algebrę operatorów ograniczonych (dowód).
15. Elementy odwracalne w algebrach Banacha: przykłady, Lemat Neumanna (dowód), otwartość zbioru elementów odwracalnych (dowód) i różniczkowalność operacji odwracania (dowód).
16. Widmo i promień spektralny: definicja i przykłady, podstawowe własności (dowód), stwierdzenie o obrazie spektralnym (dowód), wzór na promień spektralny (dowód), rachunek funkcyjny.