$(X,\mathcal{F},\mu)$ - ustalona przestrzeń z miarą

WNIOSEK (własności całki funkcji nieujemnych)

Niech $f, g \in \mathcal{M}(\mathcal{F})$, $f, g \geq 0$, $\lambda \geq 0$

(i) $\int_X \lambda f \, d\mu = \lambda \int_X f \, d\mu$

(ii) $\int_X f+g \, d\mu = \int_X f \, d\mu + \int_X g \, d\mu$

(iii) $\{f_j\}_{j=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{M}(\mathcal{F})$, $f_j \geq 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^{\infty} f_j \in \mathcal{M}(\mathcal{F})$ oraz

$$\int_X \sum_{j=1}^{\infty} f_j \, d\mu = \sum_{j=1}^{\infty} \int f_j \, d\mu$$

Dowód: Niech $\{h_j\}, \{g_j\} \subseteq \mathcal{E}(\mathcal{F})$ - ciągi funkcji prostych nieujemnych

$h_j \nearrow f$ i $g_j \nearrow g$

(takie ciągi zawsze istnieją patrz Wykład 8)

(i) $$\int_X \lambda f \, d\mu \underset{\text{Levi}}{\overset{\lambda h_j \nearrow \lambda f}{=}} \lim_{j \to \infty} \int_X \lambda h_j \, d\mu \overset{\text{STR. WYKŁAD 9}}{=} \lambda \lim_{j \to \infty} \int_X h_j \, d\mu \underset{\text{Levi}}{\overset{h_j \nearrow f}{=}} \lambda \int_X f \, d\mu$$

(ii) $$\int_X f+g \, d\mu \underset{\text{Levi}}{\overset{h_i + g_i \nearrow f+g}{=}} \lim_{i \to \infty} \int_X h_i + g_i \, d\mu =$$

Levi $\quad \lim_{j\to\infty} \int_X$

$$= \lim_{j\to\infty} \int h_j \, d\mu + \lim_{j\to\infty} \int g_j \, d\mu$$

$$\underset{\text{Levi}}{\overset{h_j \nearrow f,\ g_j \nearrow g}{=}} \int_X f \, d\mu + \int_X g \, d\mu$$

(iii) Zauważcie że sumy częściowe

$$S_N = f_1 + \dots + f_N$$

to $0 \le S_1 \le S_2 \le S_3 \dots$ oraz $S_N \nearrow \sum_{j=1}^{\infty} f_j$

Czyli

$$\int \sum_{j=1}^{\infty} f_j \, d\mu \overset{\text{Levi}}{=} \lim_{N\to\infty} \int_X \underbrace{\sum_{j=1}^{N} f_j}_{= S_N} d\mu \overset{(ii)}{=} \lim_{N\to\infty} \sum_{j=1}^{N} \int_X f_j \, d\mu$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \int_X f_j \, d\mu . \qquad \blacksquare$$

Tw (Lemat Fatou)

$\{f_j\}_{j=1}^{\infty} \subseteq M(F)$, $f_j \geq 0$ $\implies$ $\int_X \liminf_{j\to\infty} f_j \, d\mu \le \liminf_{j\to\infty} \int_X f_j \, d\mu$

{półciągłość z dołu}

Dowód:

$\int \liminf_{j\to\infty} f_j \, d\mu = \int_X \lim_{k\to\infty} \inf_{j\geq k} f_j \, d\mu =$ $\left\{ \inf_{j\ge k} f_j \nearrow_{k\to\infty} \liminf f_j \right.$; $\inf f_j \le f_j \dots$

Levi

$j \to \infty$ ... X ... $j \geq k$

$$\overset{\text{Levi}}{=} \lim_{k\to\infty} \int \inf_{j\geq k} f_j \, d\mu \leq \left\{ \boxed{\begin{array}{l} \inf_{j\geq k} f_j \leq f_k \\ + \text{ monotoniczność całki} \end{array}} \right.$$

$$\leq \liminf_{k\to\infty} \int_X f_k \, d\mu \quad \blacksquare$$

Przykład: Na ogół w lemacie Fatou mamy nierówność ostrą.

$(X, \mathcal{F}, \mu) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ – prosta z miarą Lebesgue'a

$$f_j = \mathbb{1}_{[j, j+1)}. \quad \text{Wtedy } \forall_{x\in X} \; f_j(x) \longrightarrow 0$$

$$f_j(x) = \begin{cases} 1, & x \in [j, j+1) \\ 0, & \text{w.p.p.} \end{cases}$$

Zatem

$$\int_X \lim f_j \, d\mu = \int_X 0 \, d\mu = 0$$

$$\lim_{j\to\infty} \int f_j \, d\mu = \lim_{j\to\infty} \int_X \mathbb{1}_{[j,j+1)} d\mu = \lim_{j\to\infty} \mu([j, j+1)) = 1$$

$$\int_X \lim f_j \, d\mu \neq \lim_{j\to\infty} \int f_j \, d\mu$$

$<$

CAŁKA Z DOW. FUNKCJI MIERZALNEJ

Przypominamy, że $\boxed{f \in M(\mathcal{F}) \Rightarrow f = f^+ - f^-}$

gdzie $f^+, f^- \in M(\mathcal{F})$, $f^+, f^- \geq 0$ – nieujemne gdzie $f^+, f^- \in M(\mathcal{F})$, $f^+, f^- \geq 0$ mierzalne

$$\boxed{f^+(x) = \max\{f(x), 0\}, \quad f^-(x) = \max\{-f(x), 0\}}$$

Def: Powiemy, że funkcja mierzalna $f: X \to \mathbb{R}$ jest <u>całkowalna</u> (albo μ-całkowalna) jeżeli

$$\int_X f^+ d\mu, \ \int_X f^- d\mu < \infty$$

Jeśli f całkowalna, to całkę z f definiujemy wzorem

$$\int_X f \, d\mu := \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu$$

<u>Oznaczenie:</u>

$$L_1(\mu) = \left\{ f \in M(\mathcal{F}) : \int_X f^+ d\mu, \int_X f^- d\mu < \infty \right\}$$

zbiór wszystkich funkcji μ-całkowalnych.

<u>**Def:**</u> Jeśli $\mu = \lambda^n$ – n-wymiarowa miara Lebesgue'a i $f: X \to \mathbb{R}$ całkowalna na obszarze $X \subseteq \mathbb{R}^n$, to

$$\int_X f(x) \, dx := \int_X f \, d\lambda^n$$

nazywamy całką Lebesgue'a funkcji f.

<u>**STW.:**</u> Dla $f \in M(\mathcal{F})$ NWSR:

STW. Dla $f \in \mathcal{M}(\mathcal{F})$ NWSR:

(i) $f \in L_1(\mu)$

(ii) $f^+, f^- \in L_1(\mu)$

(iii) $|f| \in L_1(\mathbb{R})$

(iv) $\exists_{g \in L_1(\mu)} |f| \leq g$

Dowód: (i) $\Leftrightarrow$ (ii) z definicji.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Skoro $|f| = f^+ + f^-$, to

$$\int_X |f| \, d\mu = \int_X f^+ + f^- \, d\mu \overset{\text{WW}}{=} \underbrace{\int_X f^+ \, d\mu}_{<\infty} + \underbrace{\int_X f^- \, d\mu}_{<\infty} < \infty$$

czyli $|f| \in L_1(\mu)$.

(iii) $\Rightarrow$ (iv). Wystarczy wziąć $g = |f|$

(iv) $\Rightarrow$ (ii). Zauważmy, że

$f^+, f^- \leq |f| \leq g$. Stąd i z monotoniczności całki

$$\int_X f^+ \, d\mu, \int_X f^- \, d\mu \leq \int_X |f| \, d\mu \leq \int_X g \, d\mu < \infty$$

$\blacksquare$

TW Dla $f, g \in L_1(\mu)$ oraz $\lambda \in \mathbb{R}$ mamy

(i) $\lambda f \in L_1(\mu)$ oraz $\int_X \lambda f \, d\mu = \lambda \int_X f \, d\mu$

(ii) $f + g \in L_1(\mu)$ oraz $\int_X f + g \, d\mu = \int_X f \, d\mu + \int_X g \, d\mu$

(iii) $\min\{f,g\}, \max\{f,g\} \in \mathcal{L}_1(\mu)$

(iv) $f \leq g \Rightarrow \int_X f\, d\mu \leq \int_X g\, d\mu$

(v) $\left|\int_X f\, d\mu\right| \leq \int_X |f|\, d\mu.$

Dowód:

(i) $\lambda f = (\lambda f)^+ - (\lambda f)^-$

$$(\lambda f)^+ = \begin{cases} \lambda \cdot f^+, & \lambda \geq 0 \\ -\lambda \cdot f^-, & \lambda < 0 \end{cases}$$

$$(\lambda f)^- = \begin{cases} \lambda \cdot f^-, & \lambda \geq 0 \\ -\lambda \cdot f^+, & \lambda < 0 \end{cases}$$

Zatem

$$\int_X \lambda f\, d\mu \overset{def}{=} \int_X (\lambda f)^+ d\mu - \int_X (\lambda f)^- d\mu =$$

$$= \begin{cases} \int_X \lambda f^+ d\mu - \int \lambda f^- d\mu, & \lambda \geq 0 \\ \int_X -\lambda f^- d\mu - \int -\lambda f^+ d\mu, & \lambda < 0 \end{cases}$$

$$\overset{WN}{=} \begin{cases} \lambda \int_X f^+ d\mu - \lambda \int_X f^- d\mu, & \lambda \geq 0 \\ -\lambda \int_X f^- d\mu - (-\lambda) \int_X f^+ d\mu & \lambda < 0 \end{cases}$$

. .

$$= \lambda \int_X f^+ d\mu - \lambda \int_X f^- d\mu$$

$$= \lambda \left(\int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu \right)$$

$$\overset{def}{=} \lambda \cdot \int_X f d\mu .$$

(ii) $\blacksquare$

(iii) $|\max\{f, g\}| \leq |f| + |g| \in L_1(\mathbb{R})$

$|\min\{f, g\}| \leq |f| + |g| \in L_1(\mathbb{R})$

(iv) $f \leq g \Rightarrow g - f \geq 0$ i stąd

$$\int_X g \, d\mu = \int_X f + (g-f) \, d\mu \overset{(ii)}{=} \int_X f d\mu + \underbrace{\int_X g - f d\mu}_{\geq 0}$$

$$\geq \int_X f d\mu .$$

(v)

$$\left|\int f d\mu\right| = \cancel{\left|\int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu\right|} =$$

$$= \max\left\{\int f d\mu, -\int f d\mu\right\} \overset{(i)}{=}$$

$$= \max\left\{\int_X f d\mu, \int_X -f d\mu\right\} \leq \left\{ \begin{matrix} f, -f \leq |f| \\ \text{zatem z} \\ \text{(iv)} \end{matrix} \right\}$$

$$\leq \int_X |f| d\mu . \; \blacksquare$$

$\boxed{\text{Przykład}}$ (Miara Diraca)

(i) Niech $\mu = \delta_{x_0}$ – miara Diraca skupiona w punkcie

$x_0 \in X$.

$$\delta_{x_0}(A) = \begin{cases} 1, & x_0 \in A \\ 0, & x_0 \notin A \end{cases}$$

wtedy

$$\boxed{\int_X f \, d\delta_{x_0} = f(x_0)}$$

1) Jeśli $f = \sum_{j=1}^{n} y_j \mathbb{1}_{A_j}$ - funkcja prosta i $\{A_j\}_{j=1}^{n}$ parami rozłączne oraz $\bigcup_{j=1}^{n} A_j = X$

$$\int_X f \, d\delta_{x_0} = \sum_{j=1}^{n} y_j \, \delta_{x_0}(A_j) = y_{j_0} =$$

{dla jedynego j_0 takiego, że $x_0 \in A_{j_0}$.}

$$= f(x_0)$$

2) Jeżeli $f \in M(F)$, $f \geq 0$, to $\exists_{\{f_j\}_{j=1}^{\infty} \in \mathcal{E}(F)}$ $f_j \nearrow f$;

wtedy

$$\int_X f \, d\delta_{x_0} \stackrel{\text{Levi}}{=} \lim_{j \to \infty} \int f_j \, \delta_{x_0} \stackrel{1)}{=} \lim_{j \to \infty} f_j(x_0) = f(x_0)$$

3) Jeżeli $f \in M(F)$ ~~borelowska~~, to

$$\int_X f \, d\delta_{x_0} \stackrel{\text{def}}{=} \int_X f^+ \, d\delta_{x_0} - \int_X f^- \, d\delta_{x_0}$$

$$\stackrel{2)}{=} f^+(x_0) - f^-(x_0) = f(x_0).$$

Przykład (Miara licząca)

Niech $(X, \mathcal{F}, \mu) = \left(\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}}, \underbrace{\mu = \sum_{j=1}^{\infty} \delta_j}\right)$.

← miara licząca

$$\mu(A) = \sum_{j=1}^{\infty} \delta_j(A) = |A| \text{ - moc zbioru } A.$$

Wtedy

$$f \in L_1(\mu) \iff \sum_{j=1}^{\infty} |f(j)| < \infty$$

$$\int_{\mathbb{N}} f \, d\mu = \int_{\mathbb{N}} f \, d \sum_{j=1}^{\infty} \delta_j = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\mathbb{N}} f \, d\delta_j = \sum_{j=1}^{\infty} f(j)$$

Przykład Niech $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ pr. probabilistyczna i niech $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ zm. losowa.

$\xi \in L_1(P) \iff \xi$ posiada wartość oczekiwaną

$$\int_{\Omega} \xi \, dP =: E(\xi) \text{ - wartość oczekiwana zmiennej losowej}$$