Wykład 11

15 grudnia 2020
08:11

Def: Jeśli $(X, \mathcal{F}, \mu)$ przestrzeń z miarą i $A \in \mathcal{F}$ oraz $f \in L_1(\mu)$, to

$$\int_A f \, d\mu := \int_X \mathbb{1}_A f \, d\mu$$

$\boxed{\text{Przykład}}$ (Miara zadana przez całkę z funkcji)

$(X, \mathcal{F}, \mu)$ - prz. z miarą, $f \in L_1(\mu)$, $f \geq 0$.

Wtedy wzór

$$\forall_{A \in \mathcal{F}} \quad \nu(A) := \int_A f \, d\mu \qquad (\dagger)$$

definiuje miarę na $(\Omega, \mathcal{F})$.

1) $\nu(\emptyset) = \int_\emptyset f \, d\mu = \int_X \underbrace{\mathbb{1}_\emptyset f}_{= 0} \, d\mu = 0$

2) $\{A_i\}_{i=1}^\infty$, $i \neq j \; A_i \cap A_j = \emptyset \implies \nu\left(\bigcup_{i=1}^\infty A_i\right) = \int_{\bigcup_{i=1}^\infty A_i} f \, d\mu = \int \mathbb{1}_{\bigcup_{i=1}^\infty A_i} f \, d\mu$

$$= \left\{ \begin{array}{l} f_n := \mathbb{1}_{\bigcup_{i=1}^n A_i} f \geq 0 \\ f_n \nearrow \mathbb{1}_{\bigcup_{i=1}^\infty A_i} f \end{array} \right\} \underset{\text{Levi}}{=} \lim_{n \to \infty} \int \mathbb{1}_{\bigcup_{i=1}^n A_i} f \, d\mu$$

$$= \left| \mathbb{1}_{\bigcup_{i=1}^n A_i} f = \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{A_i} f \right| = \lim_{n \to \infty} \int \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{A_i} f \, d\mu$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{1}_{\bigsqcup_{i=1}^{\infty} A_i} f = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{1}_{A_i} f \\ \mathbb{1}_{A \sqcup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B \end{array} \right\} = \lim_{n\to\infty} \int \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{A_i} f \, d\mu$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{liniowość} \\ \text{całki} \end{array} \right\} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \int \mathbb{1}_{A_i} f \, d\mu =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \int_{A_i} f \, d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{A_i} f \, d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \nu(A_i).$$

Def: Jeżeli zachodzi (†), to piszemy wtedy

$$f = \frac{d\nu}{d\mu}$$ i nazywamy gęstością

(lub też pochodną Radona–Nikodyma)

miary ν względem miary μ.

Przykład (Rozkład prawd.)

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ – prz. probabilistyczna, $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ zmienna losowa. Rozkład zmiennej losowej $\equiv \mu_\xi = P \circ \xi^{-1} : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0, +\infty)$

miara probabilistyczna

$$\mu_\xi(A) = P(\xi^{-1}(A)) = P(\xi \in A)$$

Rozkład zm. losowej ξ jest ciągły $\Leftrightarrow$ μ_ξ ma gęstość względem miary Lebesgue'a λ $\Leftrightarrow$

$\iff \exists_{\substack{f \in L_1(\lambda) \\ f \geq 0}} \ \forall_A \ P(\xi \in A) = \int_A f \, d\lambda$

Def. Powiemy, że miara ν jest absolutnie ciągła względem miary μ, jeśli

$$\forall_{A \in \mathcal{F}} \quad \mu(A) = 0 \implies \nu(A) = 0$$

Piszemy wtedy $\nu \ll \mu$

{ν ma mniej zbiorów miary zero, niż μ}

Tw. (Radon-Nikodym) Niech ν, μ miary

$$\nu \ll \mu \iff \exists_{\substack{f \in L_1(\mu) \\ f \geq 0}} \ \forall_{A \in \mathcal{F}} \ \nu(A) = \int_A f \, d\mu$$

Ponadto, gęstość f jeśli istnieje jest wyznaczona jednoznacznie μ-prawie wszędzie (dlatego możemy pisać $f = \frac{d\nu}{d\mu}$).

Przykład (Radonów powód)

zmienna losowa ξ ma rozkład ciągły $\iff$ jej rozkład μ_ξ jest absolutnie ciągły względem miary Lebesgue'a λ $\iff$ $\mu_\xi \ll \lambda$.

I wtedy pochodna Radona-Nikodyma $\frac{d\mu_\xi}{d\lambda}$ jest gęstością zm. losowej ξ.

Jeżeli $f_1, f_2 \geq 0$ spełniają

$$\forall_{A \in \mathcal{F}} \; \nu(A) = \int_A f_1 \, d\mu = \int_A f_2 \, d\mu \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f_1 \overset{\mu\text{-p.w.}}{=\!=} f_2 \Leftrightarrow \mu(\{x \in X : f_1(x) \neq f_2(x)\}) = 0$$

Def: Jeżeli jakaś własność $\Pi = \Pi(x)$ zachodzi dla wszystkich $x \in X$ poza zbiorem $N \in \mathcal{F}$ o mierze $\mu(N) = 0$, to mówimy, że własność Π zachodzi μ-prawie wszędzie.

Stw.

(i) $f = 0 \;\; \mu\text{-p.w.} \Rightarrow \int_X f \, d\mu = 0$

(ii) $\int_X |f| \, d\mu = 0 \Leftrightarrow f = 0 \;\; \mu\text{-p.w.}$

Dowód:

(i) $f = 0 \;\; \mu\text{-p.w.} \Leftrightarrow N = \{x : f(x) \neq 0\}$ ma miarę 0 tzn $\mu(N) = 0$. Zatem

$$\int_X f \, d\mu = \underbrace{\int_{X \setminus N} \underset{0}{\underset{\shortparallel}{f}} \, d\mu}_{=0} + \underbrace{\int_N f \, d\mu}_{=0} = 0 + 0 = 0$$

$f = 0$ na $X \setminus N$ bo $\mu(N) = 0$

$f=0$ na $X\setminus N$ bo $\mu(N)=0$

$$\int_{A\cup B} f\,d\mu = \int \mathbb{1}_{A\cup B} f\,d\mu = \int (\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B) f\,d\mu =$$
$$= \int \mathbb{1}_A f\,d\mu + \int \mathbb{1}_B f\,d\mu = \int_A f\,d\mu + \int_B f\,d\mu$$

(ii) Wykorzystamy nierówność Markowa: Dla $c\geq 0$

$$\mu(\{x: |f(x)|\geq c\}) = \int_X \mathbb{1}_{\{|f|\geq c\}}\,d\mu =$$
$$= \int_X \frac{c}{c}\,\mathbb{1}_{\{|f|\geq c\}}\,d\mu \leq \int_X \frac{|f|}{c}\,\mathbb{1}_{\{|f|\geq c\}}\,d\mu$$
$$\leq \frac{1}{c}\int_X |f|\,d\mu$$

($c \leq |f|$, $\mathbb{1}_{\{|f|\geq c\}} \leq 1$)

Stąd

$$\mu(\{x: f(x)\neq 0\}) = \mu(\{x: |f(x)|> 0\}) =$$
$$= \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}\{x: |f(x)|\geq \tfrac{1}{k}\}\right) \overset{\text{subaddyt.}}{\leq} \sum_{k=1}^{\infty}\mu(\{x: |f(x)|\geq \tfrac{1}{k}\})$$

W. Markowa

$$\leq \sum_{k=1}^{\infty} k\int_X |f|\,d\mu$$

Czyli

$$\int_X |f|\,d\mu = 0 \implies \mu(\{x: f(x)\neq 0\}) = 0 \iff f \overset{\mu\text{-p.w.}}{=} 0$$

■

$\int_X |f| \, d\mu = 0 \implies f = 0$ ...

TWIERDZENIA O PRZECHODZENIU Z GRANICĄ POD CAŁKĘ

$(X, \mathcal{F}, \mu)$ – ustalona przestrzeń z miarą

Tw (O zbieżności monotonicznej)

(i) $\left(\begin{array}{l} \{f_j\}_{j=1}^{\infty} \subseteq L_1(\mu) \\ f_j \nearrow f \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{l} f \in L_1(\mu) \Leftrightarrow \lim_{j \to \infty} \int f_j \, d\mu < \infty \\ \text{i wtedy} \\ \int_X f \, d\mu = \lim_{j \to \infty} \int f_j \, d\mu \end{array} \right)$

(ii) $\left(\begin{array}{l} \{f_j\}_{j=1}^{\infty} \subseteq L_1(\mu) \\ f_j \searrow f \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{l} f \in L_1(\mu) \Leftrightarrow \lim_{j \to \infty} \int f_j \, d\mu > -\infty \\ \text{i wtedy} \\ \int_X f \, d\mu = \lim_{j \to \infty} \int f_j \, d\mu \end{array} \right)$

Dowód: (i) $\Leftrightarrow$ (ii) poprzez przejście od $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ i $\{f\}$ do $\{-f_j\}_{j=1}^{\infty}$ i $\{-f\}$

(i) to w zasadzie Tw. Beppo-Leviego

Zauważmy, że

$$\underbrace{f_j - f_1}_{\geq 0} \nearrow \underbrace{f - f_1}_{\geq 0} \xrightarrow[\text{dla nieujemnych}]{\text{Levi}} \lim_{j \to \infty} \int_X f_j - f_1 \, d\mu = \int_X f - f_1 \, d\mu$$

$$\Longrightarrow \lim_{j \to \infty} \int_X f_j \, d\mu = \int_X f \, d\mu. \; \blacksquare$$

Tw (O zbieżności zmajoryzowanej – Tw. Lebesgue'a)

Tw (O zbieżności zmajoryzowanej - Tw. Lebesgue'a)

$$\left(\begin{array}{l}\forall_j\ |f_j| \le \boxed{g \in L_1(\mu)} \\ \lim_{j\to\infty} f_j = f \quad \mu\text{-p.w.}\end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{l}\{f_j\}_{j=1}^{\infty},\ f \in L_1(\mu) \\ \lim_{j\to\infty}\int_X f_j\, d\mu = \int_X f\, d\mu \\ \boxed{\lim_{j\to\infty}\int_X |f_j - f|\, d\mu = 0}\end{array}\right)$$

funkcja majoryzująca

Dowód: $N = \{x : \lim_{j\to\infty} f_j(x) \neq f(x)\}$, z założenia $\mu(N) = 0$. Zatem możemy założyć, że $N = \emptyset$ wtedy

$$|f| = \lim_{j\to\infty} |f_j| \le g$$

Zatem $f \in L_1(\mu)$ i $\{f_j\}_{j=1}^{\infty} \subseteq L_1(\mu)$. Ponadto

$$|f_j - f| \le |f_j| + |f| \le 2g \Rightarrow 2g - |f_j - f| \ge 0$$

Korzystając z Lematu Fatou

$$\int_X 2g\, d\mu = \int \lim_{j\to\infty} 2g - |f_j - f|\, d\mu \le \qquad |f_j - f| \xrightarrow[j\to\infty]{} 0$$

$$\le \liminf_{j\to\infty} \int_X 2g - |f_j - f|\, d\mu =$$

$$= \int_X 2g\, d\mu - \limsup_{j\to\infty} \int_X |f_j - f|\, d\mu$$

Stąd

$$0 \leq \underbrace{\limsup_{j\to\infty} \int_X |f_j - f| d\mu}_{\geq 0} \Rightarrow \limsup_{j\to\infty} \int |f_j - f| d\mu = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{j\to\infty} \int |f_j - f| d\mu = 0.$$

To jest dowód $\square$. Stąd

$$\left| \int_X f_j d\mu - \int_X f d\mu \right| = \left| \int f_j - f d\mu \right| \leq$$

$$\leq \int_X |f_j - f| d\mu \xrightarrow[j\to\infty]{} 0.$$

Przykład: Założenie o istnieniu funkcji majoryzującej jest istotne

Niech $(X, \mathcal{F}, \mu) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ oraz

$f_j = j \cdot \mathbb{1}_{[0, \frac{1}{j}]}$. Wtedy

$$f_j \xrightarrow{p.w.} 0 \quad \text{oraz} \quad \int_{\mathbb{R}} f_j d\lambda = j \cdot \lambda[0, \tfrac{1}{j}] = j \cdot \tfrac{1}{j} = 1$$

Czyli

$$\lim_{j\to\infty} \int f_j d\lambda = 1 \neq 0 = \int \lim f_j d\lambda.$$