Wykład 12

12 stycznia 2021
08:06

Riemann vs Lebesgue

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ – ustalona funkcja

π – podział przedziału $[a,b]$

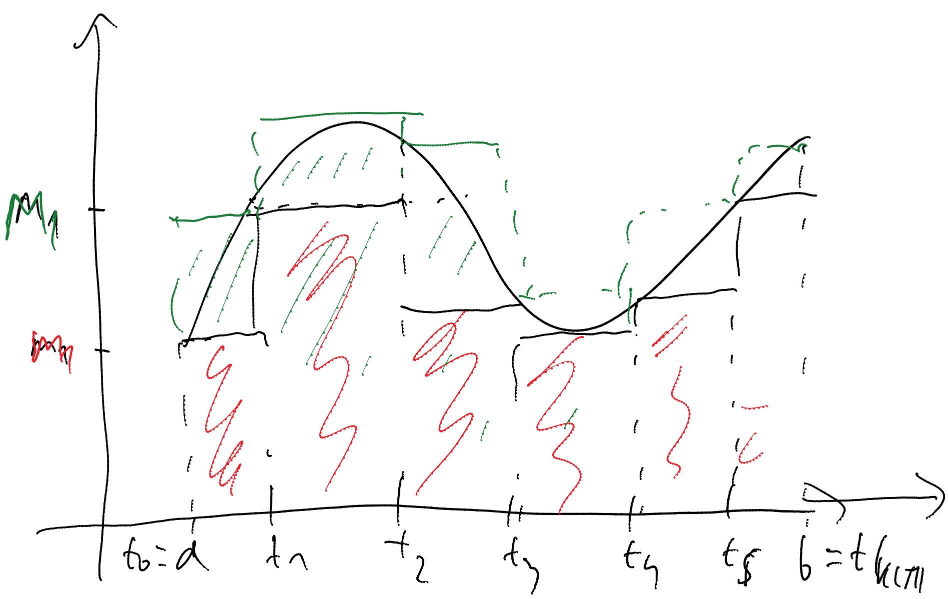
$$\pi := \{ a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{k(\pi)} = b \}$$

Połóżmy

$\forall_{j=1,\dots,k(\pi)}$ $\quad m_j := \inf_{x \in [t_{j-1}, t_j]} f(x) \qquad M_j := \sup_{x \in [t_{j-1}, t_j]} f(x)$

oraz

$$\underbrace{S_\pi(f) := \sum_{j=1}^{k(\pi)} m_j (t_j - t_{j-1})}_{\text{dolna suma całkowa}}, \qquad \underbrace{S^\pi(f) = \sum_{j=1}^{k(\pi)} M_j (t_j - t_{j-1})}_{\text{górna suma całkowa}}$$



Def: Funkcja f jest całkowalna w sensie Riemanna jeżeli wartości

$$\int_* f := \sup_{\Pi} S_{\Pi}(f) \qquad \left(\int_* f \leq \int^* f \right)$$

$$\int^* f := \inf_{\Pi} S^{\Pi}(f)$$

są sobie równe i wtedy piszemy

$$\int_a^b f(x)\,dx := \int_* f = \int^* f$$

i wartość tę nazywamy całką Riemanna funkcji f.

Uwaga: Jeżeli położymy

$$f_{\Pi}(x) := \sum_{j=1}^{k(\Pi)} m_j \mathbb{1}_{[t_{j-1}, t_j)} \quad i \quad f^{\Pi}(x) := \sum_{j=1}^{k(\Pi)} M_j \mathbb{1}_{[t_{j-1}, t_j)}$$

to otrzymujemy funkcje proste t. że

$$S_{\Pi}(f) = \int_{[a,b]} f_{\Pi}\, d\lambda \quad \text{oraz} \quad S^{\Pi}(f) = \int_{[a,b]} f^{\Pi}\, d\lambda$$

λ - jednowymiarowa miara Lebesgue'a - długość

Tw Niech $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ mierzalna. Wtedy

(i) Jeżeli f jest całkowalna w sensie Riemanna to jest całkowalna w sensie Lebesgue'a oraz

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{[a,b]} f\, d\lambda.$$

(ii) Jeżeli f jest ograniczona, to jest całkowalna w sensie Riemanna $\iff$ zbiór punktów, w których f jest nieciągła ma zerową "długość" (λ-miarę zero)

Dowód: Możemy znaleźć ciąg podziałów $\{\Pi_j\}_{j=1}^{\infty}$ takich, że

$$f_{\Pi_1} \le f_{\Pi_2} \le \dots \le f \le \dots \le f^{\Pi_2} \le f^{\Pi_1}$$

oraz

$$S_{\Pi_j}(f) \nearrow S_* f \quad \text{i} \quad S^{\Pi_j}(f) \searrow \int^* f$$

Połóżmy

$$b(f)(x) := \lim_{j\to\infty} f_{\Pi_j}(x) = \sup_{j\in\mathbb{N}} f_{\Pi_j}(x) \qquad \left(b(f) \le f \le \Sigma(f) \right)$$

$$\Sigma(f)(x) := \lim_{j\to\infty} f^{\Pi_j}(x) = \inf_{j\in\mathbb{N}} f^{\Pi_j}(x)$$

Na mocy Tw. o zbieżności monotonicznej

$$\int b(f)\, d\lambda = \lim_{j\to\infty} \int_{[a,b]} f_{\Pi_j}\, d\lambda = \lim_{j\to\infty} S_{\Pi_j}(f) = S_* f$$

$[a,b]$

$$\int_{[a,b]} \Sigma(f)\, d\lambda = \lim_{j\to\infty} \int_{[a,b]} f^{\pi_j}\, d\lambda = \lim_{j\to\infty} S^{\pi_j}(f) = S^* f$$

(i) Załóżmy, że f jest całkowalna w sensie Riemanna (tzn. $S_* f = S^* f$). Wtedy

$$\int_{[a,b]} \underbrace{\Sigma(f) - b(f)}_{\geq 0}\, d\lambda = \int_{[a,b]} \Sigma(f)\, d\lambda - \int_{[a,b]} b(f)\, d\lambda = S_* f - S^* f = 0$$

Zatem (skoro $\Sigma(f) - b(f) \geq 0$) wynika stąd, że $\Sigma(f) = b(f)$ λ-p.w. oraz skoro $b(f) \leq f \leq \Sigma(f)$ to $\Sigma(f) = b(f) = f$ λ-p.w. Dlatego

$$\int_{[a,b]} f\, d\lambda = \int_{[a,b]} b(f)\, d\lambda = S_* f = \int_a^b f(x)\, dx$$

i w szczególności $f \in L^1(\lambda)$.

(ii) Załóżmy, że f jest ograniczona. Zauważmy, że

$E := \bigcup_{j=1}^{\infty} \pi_j \subseteq [a,b]$ jest zbiorem przeliczalnym a zatem zbiorem λ-miary zero (zerowej długości).

Niech $x \in [a,b]$. Skoro f jest ograniczona, to

$$\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{n} \quad |f_{\Pi_n}(x) - b(f)(x)| < \varepsilon \quad i \quad |f^{\Pi_n}(x) - \Sigma(f)(x)| < \varepsilon$$

Dla n jak powyżej istnieje przedział $[t_{j_0-1}, t_{j_0})$ (t.że $x \in [t_{j_0-1}, t_j])$ t.że

$$\forall_{y \in (t_{j_0-1}, t_{j_0})} \quad |f(x) - f(y)| \leq M_{j_0} - m_{j_0} =$$

$$= f^{\Pi_n}(x) - f_{\Pi_n}(x) \leq 2\varepsilon + \Sigma(f) - b(f).$$

Zatem

$$\{x : f \text{ jest nieciągła w } x\} \subseteq E \cup \{x : \Sigma(f) \neq b(f)\}$$

Czyli inaczej mówiąc

$$\{x : \Sigma(f)(x) = b(f)(x)\} \subseteq E \cup \{x : f \text{ jest ciągła w } x\}$$

Stąd

f jest całkowalna w sensie Riemanna $\iff$

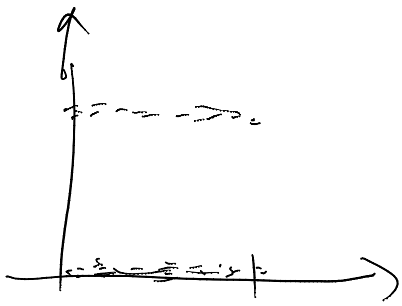
$$\int_{[a,b]} \Sigma(f)\, d\lambda = \int_{[a,b]} b(f)\, d\lambda \xLeftrightarrow{b(f) \leq \Sigma(f)} \Sigma(f) = b(f) \ \lambda\text{-p.w.}$$

$$\iff \lambda(\{x : f \text{ jest nieciągła w } x\}) = 0. \ \blacksquare$$

Przykład!

Przykład!

$$f(x) = \mathbb{1}_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$$



Funkcja f jest całkowalna w sensie Lebesgue'a

$$\int_{[0,1]} f \, d\lambda = \int_{[0,1]} \mathbb{1}_{\mathbb{Q}\cap[0,1]} \, d\lambda = \lambda(\underbrace{\mathbb{Q}\cap[0,1]}_{\text{zbiór przeliczalny}}) = 0.$$

Natomiast f nie jest całkowalna w sensie Riemanna, bo

$$\lambda(\{x : f \text{ nie jest ciągła w } x\}) = \lambda([0,1]) = 1 \neq 0$$

czyli zbiór punktów nieciągłości ma niezerową miarę.

MIARY PRODUKTOWE

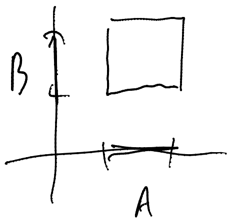
Ustalmy przestrzenie z miarami σ-skończonymi

$$(X, \mathcal{A}, \mu) \text{ oraz } (Y, \mathcal{B}, \nu)$$

Skonstruujemy przestrzeń z miarą σ-skończoną

$$(X \times Y, \mathcal{A}\otimes\mathcal{B}, \mu\otimes\nu)$$

Lemat) Iloczyn kartezjański $\mathcal{A}\times\mathcal{B}$ σ-algebr jest półpierścieniem (zazwyczaj nie jest σ-algebrą)



$$\mathcal{A}\times\mathcal{B}=\{A\times B : A\in\mathcal{A},\ B\in\mathcal{B}\}$$

Dowód:

(S_1) $\emptyset=\emptyset\times\emptyset\in\mathcal{A}\times\mathcal{B}$

(S_2) $$\left.\begin{array}{l} S=A_1\times B_1\in\mathcal{A}\times\mathcal{B} \\ T=A_2\times B_2\in\mathcal{A}\times\mathcal{B}\end{array}\right\} \Rightarrow S\cap T = A_1\times B_1\cap A_2\times B_2 = (A_1\cap A_2)\times(B_1\cap B_2) \in \mathcal{A}\times\mathcal{B}$$

(S_3) $$\left.\begin{array}{l} S,T\in\mathcal{A}\times\mathcal{B} \\ \text{jak wyżej}\end{array}\right\} \Rightarrow S\setminus T = A_1\setminus A_2\times B_1\setminus B_2 \sqcup A_1\cap A_2\times B_1\setminus B_2 \sqcup A_1\setminus A_2\times B_1\cap B_2$$ ∎

Czyli $\mathcal{A}\times\mathcal{B}$ półpierścień

Def: σ-algebrę produktową definiujemy jako $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B} := \underline{\sigma(\mathcal{A}\times\mathcal{B})}$ σ-algebrę generowaną przez półpierścień $\mathcal{A}\times\mathcal{B}$. Parę $(X\times Y, \mathcal{A}\otimes\mathcal{B})$ nazywamy produktową przestrzenią mierzalną.

Lemat Jeśli $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{F})$ oraz $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{G})$ gdzie $\mathcal{F}$ i $\mathcal{G}$ są rodzinami zamkniętymi na ciągi wyczerpujące $\{F_j\}_{j=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{F}$, $F_j \nearrow X$ oraz $\{G_j\}_{j=1}^{\infty}$, $G_j \nearrow Y$

to

$$\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} = \sigma(\mathcal{A} \times \mathcal{B}) = \sigma(\mathcal{F} \times \mathcal{G})$$

Dowód: Jasne jest, że

$$\mathcal{F} \times \mathcal{G} \subseteq \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \qquad (\text{bo } \mathcal{F} \times \mathcal{G} \subseteq \mathcal{A} \times \mathcal{B})$$

zatem $\sigma(\mathcal{F} \times \mathcal{G}) \subseteq \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. Aby wykazać inkluzję przeciwną sprawdzimy, że

$$\Sigma_1 := \{A \in \mathcal{A} : \forall_{G \in \mathcal{G}} \ A \times G \in \sigma(\mathcal{F} \times \mathcal{G})\}$$

jest σ-algebrą podzbiorów X

1) Σ_1 niepusta bo dla dowolnego $A \in \mathcal{F}$ i $G \in \mathcal{G}$

$$A \times G \in \mathcal{F} \times \mathcal{G} \subseteq \sigma(\mathcal{F} \times \mathcal{G}) \qquad (\mathcal{F} \subseteq \Sigma_1)$$

2) $$A \in \Sigma_1 \Longrightarrow \forall_{G \in \mathcal{G}} \quad A' \times G = \underbrace{X \times G}_{\in\, \sigma(\mathcal{F} \times \mathcal{G})} \setminus \underbrace{A \times G}_{\in\, \sigma(\mathcal{F} \times \mathcal{G}) \text{ bo } A \in \Sigma_1} \in \sigma(\mathcal{F} \times \mathcal{G})$$

$\sigma(\mathcal{F}\times\mathcal{G})$ $\quad$ $\sigma(\mathcal{F}\times\mathcal{G})$ bo $A\in\Sigma$

3) $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}\subseteq\Sigma_1 \Rightarrow \forall_{G\in\mathcal{G}} \left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)\times G=\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\underset{\substack{\Uparrow\\ \sigma(\mathcal{F}\times\mathcal{G}) \\ \text{bo } A_n\in\Sigma_1}}{A_n\times G}\right)\in\sigma(\mathcal{F}\times\mathcal{G})$

Skoro $\mathcal{F}\subseteq\Sigma_1\subseteq\mathcal{A}=\sigma(\mathcal{F})$, to wynika stąd że

$$\Sigma_1=\sigma(\mathcal{F})=\mathcal{A}.$$

Zatem

$$\mathcal{A}\times\mathcal{G}\subseteq\sigma(\mathcal{F}\times\mathcal{G})$$

Analogicznie pokazujemy, że

$$\mathcal{F}\times\mathcal{B}\subseteq\sigma(\mathcal{F}\times\mathcal{G})$$

Dlatego dla $A\in\mathcal{A}$ i $B\in\mathcal{B}$ mamy

$$A\times B=(A\times \cancel{Y})\cap(X\times B)=\bigcup_{j,k}\left(\underset{\substack{\Uparrow\\ \sigma(\mathcal{F}\times\mathcal{G})}}{A\times G_k}\right)\cap\left(\underset{\substack{\Uparrow\\ \sigma(\mathcal{F}\times\mathcal{G})}}{F_j\times B}\right)\in\sigma(\mathcal{F}\times\mathcal{G})$$

Zatem ostatecznie

$$\mathcal{A}\times\mathcal{B}\subseteq\sigma(\mathcal{F}\times\mathcal{G})\Rightarrow\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}=\sigma(\mathcal{A}\times\mathcal{B})\subseteq\sigma(\mathcal{F}\times\mathcal{G})$$

$$\mathcal{A} \times \mathcal{B} \subseteq \sigma(\mathcal{F} \times \mathcal{G}) \Rightarrow \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} = \sigma(\mathcal{A} \times \mathcal{B}) \subseteq \sigma(\mathcal{F} \times \mathcal{G})$$

$\blacksquare$