Miary Produktowe

Niech (X, F_X, μ_X) i (Y, F_Y, μ_Y) przestrzenie z miarą. Niech

$$Z := X \times Y$$

oraz niech

$$F_Z := \sigma(F_X \times F_Y) =: F_X \otimes F_Y$$

σ-algebra produktowa. Na półpierścieniu $F_X \times F_Y$ definiujemy funkcję zbioru

$$\boxed{\mu_Z(A \times B) = \mu_X(A) \cdot \mu_Y(B)}$$

$A \in F_X$, $B \in F_Y$.

<u>TW</u> Funkcja $\mu_Z : F_X \times F_Y \to [0, +\infty]$ jest σ-addytywna.

Dowód: (Idea - zapisać μ_Z jako całkę względem μ_X)

Dla każdego $C = A \times B \in F_X \times F_Y$ połóżmy

$$\boxed{f_C(x) = \mathbb{1}_A(x) \cdot \mu_Y(B)}$$

Wtedy

$$\int_X f_C(x)\, d\mu_X = \mu_X(A)\cdot\mu_Y(B) = \mu_Z(C)$$

(Addytywność) Jeśli $C = \bigcup_{k=1}^{n} C_k \in \mathcal{F}_X \times \mathcal{F}_Y$, gdzie $C_k \in \mathcal{F}_X \times \mathcal{F}_Y$, $k = 1, \dots, n$, to

$$f_C(x) = \sum_{k=1}^{n} f_{C_k}(x)$$

i z addytywności całki

$$\mu_Z(C) = \int_X f_C(x)\, d\mu_X = \sum_{k=1}^{n} \int_X f_{C_k}(x)\, d\mu_X = \sum_{k=1}^{n} \mu_Z(C_k)$$

(σ-addytywność) Dla każdego $C \subseteq X \times Y$ oraz $x \in X$ rozważmy x-przekrój zbioru C:

$$C_x := \{y \in Y : (x,y) \in C\}$$

zbiór y-ków leżących w C nad x

Jeśli $C = \bigcup_{k=1}^{\infty} C_k \in \mathcal{F}_X \times \mathcal{F}_Y$ oraz $C_k \in \mathcal{F}_X \times \mathcal{F}_Y$ dla $k = 1, 2, \dots$, to

$$\forall_x \quad C_x = \bigcup_{k=1}^{\infty} (C_k)_x .$$

Zatem z σ-addytywności μ_Y mamy

$$f_C(x) = \mu_Y(C_x) = \mu_Y\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}(C_k)_x\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\mu_Y((C_k)_x)$$

$$\left\{\begin{array}{l} C = A\times B \\ C_x = \begin{cases} B & \text{dla } x\in A \\ \emptyset & \text{dla } x\notin A \end{cases} \end{array}\right.$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} f_{C_k}(x)$$

Całkując obustronnie dostajemy

$$\mu_Z(C) = \int_X f_C(x)\,d\mu_X = \int_X \sum_{k=1}^{\infty} f_{C_k}(x)\,d\mu_X \overset{\text{tw. całkowanie wyraz po wyrazie}}{=}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\int_X f_{C_k}(x)\,d\mu_X = \sum_{k=1}^{\infty}\mu_Z(C_k) \blacksquare$$

Wniosek: Funkcja $\mu_Z : \mathcal{F}_X\times\mathcal{F}_Y \to [0,\infty]$ zdefiniowana wzorem

$$\boxed{\mu_Z(A\times B) = \mu_X(A)\cdot\mu_Y(B)} \qquad (*)$$

przedłuża się do miary na σ-algebrę $\mathcal{F}_X\otimes\mathcal{F}_Y := \sigma(\mathcal{F}_X\times\mathcal{F}_Y)$. Co więcej, jeżeli miary μ_X i μ_Y są σ-skończone, to przedłużenie to jest jednoznaczne.

Dowód: patrz konstrukcja i jednoznaczność całki (wykłady 5, 6). $\boxed{\text{Z}}$

Def: Przedłużenie funkcji μ_Z danej wzorem $(*)$ nazywamy miarą produktową, lub też iloczynem miar μ_X i μ_Y i oznaczamy ją

$\mu_X \otimes \mu_Y$ σ-skończonych

$$\mu_X \otimes \mu_Y$$

Uwaga: Produktowanie miar σ-skończonych jest łączne

$$(\mu_X \otimes \mu_Y) \otimes \mu_Z = \mu_X \otimes (\mu_Y \otimes \mu_Z)$$

Przykład 1

λ – jednowymiarowa miara Lebesgue'a (długości) na prostej $\mathbb{R}$ (na $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ – σ-ciało zb. borelowskich)

wtedy

$$\lambda^{\otimes n} := \underbrace{\lambda \otimes \lambda \otimes \dots \otimes \lambda}_{n\text{-razy}} = \lambda^n$$ – n-wymiarowa miara Lebesgue'a (objętości) w $\mathbb{R}^n$ (na $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$)

Przykład 2 X, Y zmienne losowe na przestrzeni probab. $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ są niezależne $\iff$

$$\mu_{(X,Y)} = \mu_X \otimes \mu_Y$$

rozkład wektora losowego; rozkłady poszczególnych zmiennych.

Problem Całki Iterowanej

Jeśli $f = f(x,y)$ jest funkcją na $X \times Y$, to mamy następujące wyrażenia

$$\int_{X\times Y} f(x,y)\, d\mu_X \otimes \mu_Y, \quad \int_Y \int_X f(x,y)\, d\mu_X\, d\mu_Y, \quad \int_X \int_Y f(x,y)\, d\mu_Y\, d\mu_X$$

Na ogół między nimi nie ma dobrych związków!

Na ogół [illegible] nie ma ogólnego zastosowania.

$\boxed{\text{Przykład 1}}$ Niech $X = Y = [-1,1]$ z miarą Lebesgue'a

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{(x^2+y^2)^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{w p.p.} \end{cases}$$

Wtedy

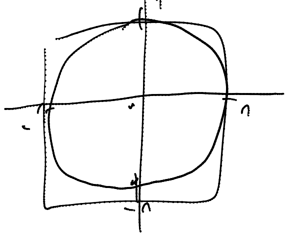
$$\int_{-1}^{1} f(x,y)\,dx = \int_{-1}^{1} f(x,y)\,d\mu = 0 \quad \left(\begin{array}{l}\text{bo } f \\ \text{nieparzysta} \\ \text{ze względu} \\ \text{na } x \text{ i na } y\end{array}\right)$$

czyli

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(x,y)\,dx\,d\mu = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(x,y)\,dy\,dx = 0$$

Z drugiej strony całka f na $X \times Y$ nie istnieje

$$\int_{[-1,1]^2} |f(x,y)|\,d\lambda^2 = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} |f(x,y)|\,dx\,dy \geq$$



$$\geq \iint_{\{x^2+y^2 \leq 1\}} |f(x,y)|\,dx\,dy = \left\{\begin{array}{l}\text{zamieniam współrz.} \\ x = r\sin\varphi \\ y = r\cos\varphi\end{array}\right.$$

$$= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{r^2|\sin\varphi\cos\varphi|}{(r^2)^2}\, r\, d\varphi\, dr =$$

$\uparrow$ JACOBIAN

$$= \int_0^1 \frac{1}{r} \underbrace{\int_0^{2\pi} |\sin\varphi\cos\varphi|\,d\varphi}_{=:C}\, dr =$$

$$= C \cdot \int_0^1 \frac{1}{r}\,dr = C \cdot [\ln]_0^1 = +\infty$$

$\boxed{\text{Przykład 2}}$

Niech $X = Y = [0,1]$ oraz

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Wtedy

$$\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dy = \int_0^1 \partial_y\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)dy = \left[\frac{y}{x^2+y^2}\right]_0^1 = \frac{1}{x^2+1}$$

a stąd

$$\int_0^1\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dy\,dx = \int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\,dx = [\operatorname{arctg} x]_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

Zauważmy, że $f(x,y) = -f(y,x)$ i stąd

$$\int_0^1\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dx\,dy = -\frac{\pi}{4}$$

Czyli z istnienia całek iterowanych nie wynika ich równość. ∎

$\boxed{\text{STW.}}$ Niech $\mu_Z := \mu_X \otimes \mu_Y$ miara produktowa oraz $C \subseteq X \times Y$ będzie μ_Z-mierzalnym. Wtedy

1) Dla μ_X-prawie każdego $x \in X$ przekrój

$$C_x = \{y \in Y : (x,y) \in C\}$$

jest μ_Y-mierzalny. W szczególności prawie wszędzie jest określona funkcja

$$f_C(x) = \mu_Y(C_x)$$

i jest ona μ_X-mierzalna

2) Zachodzi równość

$$\mu_X \otimes \mu_Y(C) = \int_X f_C(x)\,d\mu_X$$

Dowód: Gdy $C=\bigcup_{k=1}^{\infty} C_k$ gdzie $C_k = A_k \times B_k$ to już to widzieliśmy w dowodzie Tw.

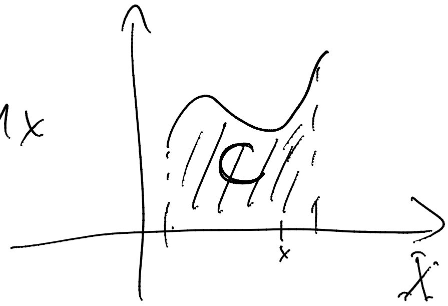
Ogólnie

$\boxed{\text{WNIOSEK}}$ Jeżeli $f(x) \geq 0$ jest mierzalna na X, μ_X – miara na X, λ miara Lebesgue'a na $\mathbb{R}$ oraz

$$C = \{(x,t) \in X \times \mathbb{R} : 0 \leq t \leq f(x)\}$$

to

$$\underbrace{\mu_X \otimes \lambda(C)}_{} = \int_X f(x)\, d\mu_X$$



„pole" (objętość) obszaru pod wykresem funkcji

Dowód: Zauważmy, że $C_x = [0, f(x)]$ a zatem

$$f_C(x) = \lambda(C_x) = f(x) - 0 = f(x)$$ więc wzór ze Stw. 2) przyjmuje postać (*)

$\boxed{\text{TW}}$ $\boxed{\text{Fubini}}$ Niech $f(x,y)$ będzie całkowalna względem miary produktowej $\mu_X \otimes \mu_Y$. Wtedy

1) $f(x,y)$ jako funkcja od y jest μ_Y-całkowalna dla μ_X-prawie wszystkich x oraz istnieje całka iterowana

$$\int_X \int_Y f(x,y)\, d\mu_Y\, d\mu_X$$

(w szczególności funkcja $X \ni x \to \int_Y f(x,y)\,d\mu_Y$
jest μ_X – mierzalna)

2) $f(x,y)$ jako funkcja od x jest μ_X-całkowalna
dla prawie wszystkich y oraz istnieje

$$\int_Y \int_X f(x,y)\,d\mu_X\,d\mu_Y$$

3) Zachodzą równości

$$\int_{X\times Y} f(x,y)\,d\mu_X\otimes d\mu_Y = \int_X\int_Y f(x,y)\,d\mu_Y\,d\mu_X =$$

$$= \int_Y\int_X f(x,y)\,d\mu_X\,d\mu_Y.$$

Tw. Tonelli Jeśli $f(x,y) \geq 0$ i mierzalna, to
z istnienia jednej z całek iterowanych
wynika całkowalność $f(x,y)$ względem $\mu_X\otimes\mu_Y$