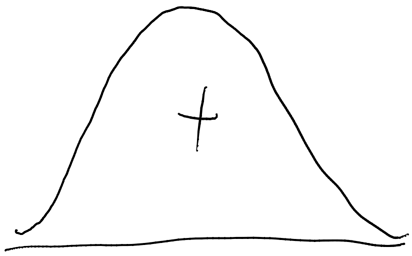
Wykład 14
26 stycznia 2021
08:03

MIARY ZNAKOWE – ŁADUNKI

miara ≈ gęstość



miara znakowa ≈ ładunek

Def: **Ładunkiem** lub też miarą znakową nazywamy σ-addytywną funkcję zbioru $\nu : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ określoną na pewnej σ-algebrze $\mathcal{F}$ podzbiorów zbioru X, tzn. zakładamy, że

$$\forall_{\substack{\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{F} \\ \text{parami rozłączne}}} \quad \nu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n).$$

Uwaga: Z def. wynika, że szereg jest zbieżny absolutnie oraz że $\nu(\emptyset) = \nu(\emptyset) + \nu(\emptyset) + \ldots = 0$.

Przykłady 1) Jeśli $\mu_+, \mu_- : \mathcal{F} \to [0, +\infty)$, to wzór

$$\nu(A) := \mu_+(A) - \mu_-(A)$$

definiuje ładunek na $\mathcal{F}$.

2) Jeśli $\mu : \mathcal{F} \to [0, +\infty]$ miarą, $f: X \to \mathbb{R}$ μ-całkowalna, to

$$V_f(A) := \int_A f \, d\mu \quad \text{ładunek}$$

Ponadto, zauważmy, że kładąc $f^{\pm} := \max\{\pm f(x), 0\}$, mamy $f = f^+ - f^-$ oraz dla

$$\mu_+(A) := \int_A f^+ \, d\mu \quad \text{i} \quad \mu_-(A) = \int_A f^- \, d\mu$$

mamy

$$V_f(A) = \mu_+(A) - \mu_-(A)$$

czyli V_f jest różnicą miar.

Def: Zbiór mierzalny $A \subseteq X$ nazywamy dziedziną dodatnią ładunku $V: \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ jeżeli dla dowolnego mierzalnego $B \subseteq A$ mamy $V(B) \geq 0$.

Analogicznie, A będzie dziedziną ujemną jeżeli $B \subseteq A \Rightarrow V(B) \leq 0$.

Uwaga: Ładunek V jest na dziedzinie dodatniej jest miarą, a na dziedzinie ujemnej $-V$ jest miarą.

Tw. [Hahna o rozkładzie dziedziny ładunku]

Dla dow. ładunku $V: F \to \mathbb{R}$ istnieje dziedzina X^+ oraz dziedzina ujemna X^- takie, że

$$X = X^+ \sqcup X^-.$$

WN. (Tw. JORDANA o rozkładzie ładunku na różnicę miar)

Dla dowolnego ładunku $V: F \to \mathbb{R}$ istnieją miary $\mu_+, \mu_-: F \to [0, +\infty)$ takie, że

$$V = \mu_+ - \mu_-$$

Co więcej miary μ_+ i μ_- można wybrać tak aby były wzajemnie osobliwe, tzn. istnieją rozłączne zbiory X^+ i X^- t. że

$$\mu_-(X^+) = 0, \quad \mu_+(X^-) = 0, \quad X = X^- \sqcup X^+$$

Jeśli miary μ_+ i μ_- są wzajemnie osobliwe, to są wyznaczone przez V jednoznacznie. Są one dane wzorami

$$\mu^+(A) = \max\{V(B) : B \subseteq A\} \qquad (*)$$

$$\ldots V(B) : B \subseteq A\}$$

1

$$\mu^-(A) = \max\{-\nu(B) : B \subseteq A\}$$

Dowód: Jeśli $X = X^- \cup X^+$ jest rozkładem Hahna to kładąc

$$\mu^+(A) := \nu(A \cap X^+) \quad \text{oraz} \quad \mu^-(A) := -\nu(A \cap X^-)$$

otrzymujemy miary μ_+ i μ_-, które są wzajemnie osobliwe oraz

$$\nu(A) \overset{\text{addytywność } \nu}{=} \nu(A \cap X^+) + \nu(A \cap X^-) = \mu^+(A) - \mu^-(A)$$

Co więcej zachodzą formuły wariacyjne (*).

Aby wykazać JEDNOZNACZNOŚĆ ROZKŁADU JORDANA załóżmy, że

$$\nu = \mu_1 - \mu_2$$ gdzie μ_1 i μ_2 wzajemnie osobliwe (oznaczenie $\mu_1 \perp \mu_2$)

Wtedy

$$\mu^+(A) = \max\{\underbrace{\nu(B)}_{=\,\mu_1(B) - \cancel{\mu_2(B)}} : B \subseteq A\} \leq \max\{\mu_1(B) : B \subseteq A\} = \mu_1(A)$$

oraz

$$\mu^-(A) = \max\{\underbrace{-\nu(B)}_{=\,\mu_2(B) - \cancel{\mu_1(B)}} : B \subseteq A\} \leq \max\{\mu_2(B) : B \subseteq A\} = \mu_2(B)$$

Czyli $\mu^+ \le \mu_1 \qquad \mu^- \le \mu_2$

Załóżmy nie wprost, że $\mu_+ \neq \mu_-$, czyli istnieje $A \in \mathcal{F}$ t. że $\mu_+(A) < \mu_1(A)$. Wtedy także $\mu^-(A) < \mu_2(A)$. Skoro $\mu_1 \perp \mu_2$ to

$X = X_1 \cup X_2$, gdzie $\mu_1(X_2) = 0$, $\mu_2(X_1) = 0$.

W szczególności

$$\mu^+(X_2) \le \mu_1(X_2) = 0 \Rightarrow \boxed{\mu^+(X_2) = 0}$$

$$\mu^-(X_1) \le \mu_2(X_1) = 0 \Rightarrow \mu^-(X_1) = 0$$

i stąd

„μ^+ żyje na X_1"

$$\mu^+(X_1) = \mu^+(A \cap X_1) + \mu^+(X_1 \setminus A) =$$

zał. nie wprost

$$= \mu^+(A) + \mu^+(A') <$$

„μ_1 żyje na X_1"

$$< \mu_1(A) + \mu_1(A') = \mu_1(X) =$$

$$= \mu_1(X_1)$$

Czyli $\mu^+(X_1) < \mu_1(X_1)$, ale

czyli $\mu^{+}(X_1) < \mu_1(X_1)$, ale

$$\mu^{+}(X_1) = \mu^{+}(X_1) - \underbrace{\mu^{-}(X_1)}_{=0} \overset{\mu^{+}-\mu^{-} = \mu_1 - \mu_2}{=\!=\!=} \mu_1(X_1) - \underbrace{\mu_2(X_1)}_{=0} = \mu_1(X_1)$$

↯ ∎

Uwaga:

1) Z dowodu wynika, że

$$\nu = \mu_1 - \mu_2 \implies \mu_+ \leq \mu_1 \text{ oraz } \mu_- \leq \mu_2$$

Przy czym

$$\mu_+ = \mu_1 \text{ oraz } \mu_- = \mu_2 \iff \mu_1 \perp \mu_2$$

2) Miarę $|\nu| := \mu_+ + \mu_-$ nazywamy wahaniem (całkowitym) ładunku ν

3) Wszystkie ładunki na ustalonej 6-algebrze $\mathcal{F}$ tworzą prz. liniową nad $\mathbb{R}$. Na tej przestrzeni wzór

$$\|\nu\| := |\nu|(X) = \mu_+(X) + \mu_-(X)$$

Def: Jeśli ν – ładunek i $f: X \to \mathbb{R}$ mierzalna

f ν-całkowalna $\iff$ f jest $|\nu|$-całkowalna

i wtedy

$$\int_X f \, d\nu = \int_X f \, d\mu_+ - \int_X f \, d\mu_-$$

gdzie $\nu = \mu_+ - \mu_-$ i $\mu_+ \perp \mu_-$

X – zwarta prz. metryczna

$C(X)$ – prz. funkcji ciągłych $f: X \to \mathbb{R}$

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(\lambda f)(x) = \lambda \cdot f(x)$$

$$\|f\| = \max_{x \in X} |f(x)| \leftarrow$$

funkcja ciągła na zb. zwartym osiąga swoje kresy

jest przestrzenią unormowaną (zupełną)

{zbieżność w $\|\cdot\|$ $\iff$ zbieżność jednostajna}

Tw (Riesza) Dla każdego ładunku ν określonego na σ-algebrze zb. borelowskich zwartej prost. metrycznej X, wzór

$$T(f) := \int_X f \, d\mu$$

zadaje ciągły funkcjonał liniowy $T: C(X) \to \mathbb{R}$. Ponadto, każdy ciągły funkcjonał liniowy na $C(X)$ jest tej postaci ($\|T\| = \|\mu\|$)

Funkcjonały na $C(X)$	$\longleftrightarrow$	Ładunki na X
Funkcjonały dodatnie na $C(X)$ $f \geq 0 \Rightarrow T(f) \geq 0$	$\longleftrightarrow$	miary na X