Wykład II

20 października 2020

08:00

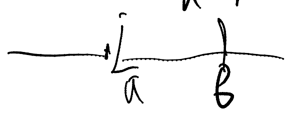
Kończymy dowód twierdzenia

TW. $\boxed{\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)=\sigma(\mathcal{J}^0)=\sigma(\mathcal{J}^0_{wym})}=\sigma(\mathcal{J})=\sigma(\mathcal{J}_{wym})$.

Dowód:

$$[a_1,b_1)\times[a_2,b_2)\times\dots\times[a_n,b_n)=\underbrace{\bigcap_{k=1}^{\infty}\underbrace{(a_1-\tfrac{1}{k},b_1)\times(a_2-\tfrac{1}{k},b_2)\times\dots\times(a_n-\tfrac{1}{k},b_n)}_{\mathcal{J}^0}}_{\sigma(\mathcal{J}^0)}$$

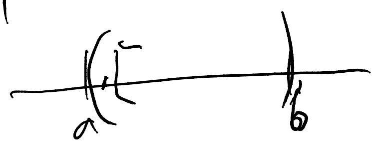
$$\left\{[a,b)=\bigcap_{k=1}^{\infty}(a-\tfrac{1}{k},b)\right\}$$



Stąd $\mathcal{J}\subseteq\sigma(\mathcal{J}^0)\Rightarrow\sigma(\mathcal{J})\subseteq\sigma(\mathcal{J}^0)$

$$(a_1,b_1)\times\dots\times(a_n,b_n)=\underbrace{\bigcup_{k=1}^{\infty}\underbrace{[a_1+\tfrac{1}{k},b_1)\times[a_2+\tfrac{1}{k},b_2)\times\dots\times[a_n+\tfrac{1}{k},b_n)}_{\mathcal{J}}}_{\sigma(\mathcal{J})}$$

$$\left\{(a,b)=\bigcup_{k=1}^{\infty}[a+\tfrac{1}{k},b)\right\}$$



Stąd $\mathcal{J}^0\subseteq\sigma(\mathcal{J})\Rightarrow\sigma(\mathcal{J}^0)\subseteq\sigma(\mathcal{J})$.

Zatem $\sigma(\mathcal{J}^0)=\sigma(\mathcal{J})$.

To samo rozumowanie dowodzi również, że

$$\sigma(\mathcal{J}^0_{wym})=\sigma(\mathcal{J}_{wym}).\ \blacksquare$$

Miara

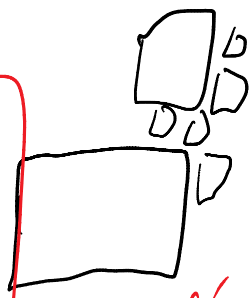
Miara

$(X, \mathcal{F})$ – pr. mierzalna, tzn. $\mathcal{F}$ jest σ-algebrą zb. na X.

Def: Miarą na X jest odwzorowanie $\mu: \mathcal{F} \to [0,+\infty]$ takie, że

(M1) $\mu(\emptyset)=0$

(M2) $\left.\begin{array}{l}\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{F} \\ \text{parami rozłączne} \\ (A_n \cap A_m = \emptyset \text{ dla } n \neq m)\end{array}\right\} \Rightarrow \mu\left(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$



σ-addytywność

Wtedy trójkę $(X, \mathcal{F}, \mu)$ nazywamy przestrzenią z miarą

μ jest skończona $\iff \mu(X) < \infty$

μ jest probabilistyczna (unormowana) $\overset{\text{def}}{\iff} \mu(X) = 1$

μ jest σ-skończona $\iff \exists \{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{F}$ $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, $\forall_{n \in \mathbb{N}}\ \mu(A_n) < \infty$

Jeżeli (M1), (M2) są spełnione, ale $\mathcal{F}$ nie jest σ-algebrą to $\mu: \mathcal{F} \to [0,+\infty]$ będziemy nazywać pre-miarą

STW. Niech $(X, \mathcal{F}, \mu)$ pr. z miarą i niech $A, B \in \mathcal{F}$.

i) $A \cap B = \emptyset \Rightarrow \mu(A \sqcup B) = \mu(A) + \mu(B)$ (addytywność)

ii) $A \subseteq B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$ (monotoniczność)

iii) $A \subseteq B$, $\mu(A) < \infty \Rightarrow \mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$ (wzór na różnicę)

iv) $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$ (wzór na sumę)

v) $\mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B)$ (subaddytywność)

Dowód:

i) Połóżmy $A_1 = A$, $A_2 = B$, $A_3 = \emptyset$, $A_4 = \emptyset$, $A_5 = \emptyset, \ldots$

$$\mu(A\cup B) = \mu(A\sqcup B\sqcup\emptyset\sqcup\emptyset\sqcup\emptyset\ldots) = \mu\Big(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) \overset{(M2)}{=} \sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)$$

$$= \mu(A)+\mu(B)+\underbrace{\mu(\emptyset)}_{\overset{(M1)}{=}0}+\underbrace{\mu(\emptyset)}_{=0}+\ldots = \mu(A)+\mu(B).$$

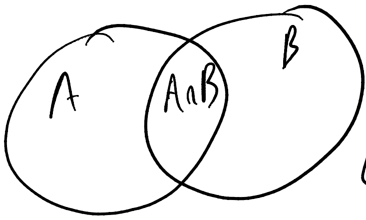
ii) $A\subseteq B$

$$\mu(B) = \mu(B\setminus A\sqcup A) \overset{(i)}{=} \underbrace{\mu(B\setminus A)}_{\geq 0} + \mu(A) \geq \mu(A)$$

iii) Jeśli $\mu(A)<\infty$, to przenosząc ↑ otrzymamy

$$\mu(B)-\mu(A) = \mu(B\setminus A)$$

iv) $\mu(A\cup B) = \mu(A\setminus(A\cap B)\sqcup A\cap B\sqcup B\setminus(A\cap B)) \overset{(i)}{=}$



$$= \mu(A\setminus(A\cap B)) + \mu(A\cap B) + \mu(B\setminus A\cap B)$$

$\{$zał. $\mu(A\cap B)<\infty\}$ $\overset{(iii)}{=} \mu(A) - \cancel{\mu(A\cap B)} +$

$+ \cancel{\mu(A\cap B)} + \mu(B) - \mu(A\cap B) =$

$= \mu(A)+\mu(B)-\mu(A\cap B)$.

Ogólnie zachodzi wzór

$$\mu(A\cup B)+\mu(A\cap B) = \mu(A)+\mu(B)$$

$$\mu(A\cup B)+\mu(A\cap B) = \mu(A\sqcup B\setminus(A\cap B)) + \mu(A\cap B)$$

$$\overset{(i)}{=} \mu(A) + \mu(B\setminus(A\cap B)) + \mu(A\cap B)$$

$$\overset{(i)}{=} \mu(A) + \mu(B\setminus A\cap B\sqcup A\cap B)$$

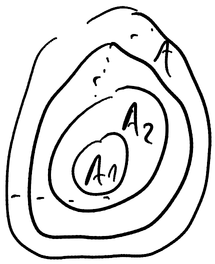
$$= \mu(A)+\mu(B)$$

v) $\mu(A)+\mu(B) \overset{(iv)}{=} \mu(A\cup B) + \underbrace{\mu(A\cap B)}_{\geq 0} \geq \mu(A\cap B)$. $\blacksquare$

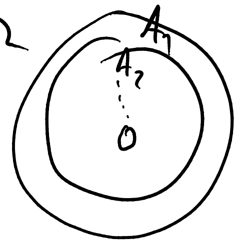
GRANICE TEORIO-MNOGOŚCIOWE ... ∞

Def: Powiemy, że ciąg zbiorów $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ jest

(a) wstępujący jeśli $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \dots$ i wtedy piszemy $A := \lim\limits_{n\to\infty} A_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ oraz $A_n \nearrow A$



(b) zstępujący, jeśli $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq A_4 \supseteq \dots$ i wtedy piszemy $A := \lim\limits_{n\to\infty} A_n = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ oraz $A_n \searrow A$.



Tw. Niech $(X, \mathcal{F})$ pr. mierzalna. Odwzorowanie $\mu: \mathcal{F} \to [0, +\infty]$ jest miarą $\Leftrightarrow$

(i) $\mu(\emptyset) = 0$

(ii) $\mu(A \sqcup B) = \mu(A) + \mu(B)$

(iii) μ jest ciągła z dołu, tzn.
$$\forall_{\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{F}} \quad A_n \nearrow A \implies \mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$$

Jeśli μ jest skończona, tzn. $\mu: \mathcal{F} \to [0, +\infty)$, to (iii') można zastąpić każdym z następujących warunków:

(iii'') μ jest ciągła z góry, tzn.
$$\forall_{\{A_n\} \subseteq \mathcal{F}} \quad A_n \searrow A \implies \mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$$

(v) μ jest ciągła w $\emptyset$, tzn.
$$\forall_{\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{F}} \quad A_n \searrow \emptyset \implies \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = 0.$$

Dowód: „⇒" (i) z def, (ii) ze STW. Trzeba pokazać (iii)

Niech $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \dots$ i połóżmy $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ oraz

$B_1 = A_1$, $B_2 = A_2 \setminus A_1$, $B_3 = A_3 \setminus A_2$, ... $B_n = A_n \setminus A_{n-1}$

Wtedy $A = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} B_n$ oraz $\{B_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq F$. Zatem

$$\mu(A) \overset{(M2)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \mu(B_n) \overset{(i)}{=}$$

$$= \lim_{N\to\infty} \mu\Big(\bigcup_{n=1}^{N} B_n\Big) = \lim_{N\to\infty} \mu(A_N).$$

Załóżmy teraz że miara μ jest skończona

(iii') Niech $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \dots$ oraz $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$.

Połóżmy

$$B_n = A_1 \setminus A_n$$

Wtedy $B_1 \subseteq B_2 \subseteq B_3 \subseteq B_4 \subseteq \dots$ oraz

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_1 \setminus A_n = A_1 \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 \setminus A.$$

Zatem $B_n \nearrow A_1 \setminus A$ i stąd

$$\mu(A_1 \setminus A) \overset{(iii)}{=} \lim_{n\to\infty} \mu(B_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_1 \setminus A_n) \overset{\text{wzór na różnicę}}{=}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \mu(A_1) - \mu(A_n) = \mu(A_1) - \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$$

|| wzór na różnicę

$\mu(A_1) - \mu(A)$

Stąd otrzymujemy $\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$.

Oczywiste jest, że (iii') ⇒ (iii'').

"$\Leftarrow$" Załóżmy, że $\mu : \mathcal{F} \to [0, \infty]$ spełnia (i),(ii),(iii)

Niech $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{F}$ parami rozłączne. Połóżmy

$$B_n = A_1 \sqcup A_2 \sqcup \dots \sqcup A_n, \quad A = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$$

Wtedy $B_n \nearrow A$ a zatem na mocy (iii)

$$\mu(A) \overset{(iii)}{=} \lim_{n\to\infty} \mu(B_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_1 \sqcup A_2 \sqcup \dots \sqcup A_n) \overset{(ii)}{=}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \mu(A_1) + \mu(A_2) + \dots + \mu(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

Zatem μ jest miarą

Żeby zakończyć dowód trzeba pokazać, że jeśli μ skończona, to (iii'') implikuje (iii)

Załóżmy (i), (ii), (iii'') i niech $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{F}$ parami rozłączne. Połóżmy

$A := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ oraz $B_n := A \setminus (A_1 \sqcup A_2 \sqcup \dots \sqcup A_n)$. Wtedy

$B_n \searrow \emptyset$ oraz na mocy (iii'')

$$0 = \lim_{n\to\infty} \mu(B_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(A \setminus (A_1 \sqcup \dots \sqcup A_n)) \overset{\text{miara różnicy}}{=}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \mu(A) - \mu(A_1 \sqcup \dots \sqcup A_n) \overset{\text{addytywność}}{=} \mu(A) - \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)$$

$$= \mu(A) - \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$ Stąd $\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ $\blacksquare$