Wykład III

20 października 2020
08:31

Przykłady miar i jednoznaczność

Wniosek. Każda miara jest σ-subaddytywna, tzn.

$$\forall_{\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{F}} \quad \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Dowód: Połóżmy $B_n := A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$. Wtedy $B_n \nearrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

Zatem z ciągłości miary

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(B_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_1 \cup \ldots \cup A_n) \underset{\substack{\text{subaddytywność} \\ \text{(było stw)}}}{\overset{\text{skończona}}{\leq}}$$

$$\leq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) \quad \blacksquare$$

Przykłady miar:

(Miara Diraca) Niech $(X, \mathcal{F})$ dow. prz. mierzalna $(\mathcal{F} = 2^X)$

Niech $x \in X$. Wtedy

$$\forall_{A \in \mathcal{F}} \quad \delta_x(A) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$ jest miarą

(Miara licząca) $(X, \mathcal{F})$ dowolna prz. mierzalna $(\mathcal{F} = 2^X)$

$$\forall_{A \in \mathcal{F}} \quad \mu(A) := \begin{cases} |A| & \text{- moc zbioru } A \text{ jeśli } A \text{ skończony} \\ \infty & \text{- w przeciwnym razie} \end{cases}$$

(Dyskretne rozkłady prawdopodobieństwa) $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$ - zbiór przeliczalny.

Niech $\{p_i\}_{i=1}^{\infty} \in [0,1]$ t. że $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$. Wtedy

Niech $\{p_j\}_{j=1}^{\infty} \in [0,1]$ t. że $\sum_{j=1}^{\infty} p_j = 1$. więc

$$\forall_{A \subseteq \Omega} \quad P(A) := \bigcup_{j: \omega_j \in A} p_j \qquad \left(P = \sum_{j=1}^{\infty} p_j \delta_{\omega_j} \right)$$

definiuje miarę probabilistyczną na Ω $(\mathcal{F} = 2^{\Omega})$

$\boxed{\text{Tw.}}$ (Lebesgue'a)

Istnieje dokładnie jedna miara λ^n określona na zb. borelowskich $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ taka, że

$$\forall_{\substack{a_j \le b_j \\ j=1,\dots,n}} \quad \lambda^n([a_1,b_1) \times [a_2,b_2) \times \dots \times [a_n,b_n)) := \prod_{j=1}^{n} (b_j - a_j) \quad (*)$$

Ponadto miara ta ma następujące własności

1) $$\forall_{\substack{B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \\ x \in \mathbb{R}^n}} \quad \lambda^n(x + B) = \lambda^n(B)$$

2) $$\forall_{B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)} \quad \forall_{M \in M_n(\mathbb{R})} \quad \lambda^n(M(B)) = |\det M| \lambda^n(B).$$

$M \in M_n(\mathbb{R})$ odwracalna macierz

($M: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ odwracalne odwz. liniowe)

Def: Miarę λ^n na $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ spełniającą $(*)$ nazywamy n-wymiarową objętością (miarą Lebesgue'a)

KRYTERIUM JEDNOZNACZNOŚCI MIAR

Def: Rodzinę zbiorów $\mathcal{D} \subseteq 2^X$ nazywamy układem

Def: Rodzinę zbiorów $\mathcal{D} \subseteq 2^X$ nazywamy **układem Dynkina** jeżeli

$(\Sigma_1) = (D_1)$ $X \in \mathcal{D}$

$(\Sigma_2) = (D_2)$ $A \in \mathcal{D} \Rightarrow A' \in \mathcal{D}$

$(\Sigma_3) \Rightarrow (D_3)$ $\left.\begin{array}{l} \{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{D} \\ \text{[zb. parami rozłączne} \end{array}\right\} \Rightarrow \bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{D}$

Uwaga 1 Każda σ-algebra jest układem Dynkina ale nie na odwrót.

Uwaga 2: Układ Dynkina zawiera $\emptyset$ oraz

$$\left.\begin{array}{l} A, B \in \mathcal{D} \\ A \cap B = \emptyset \end{array}\right\} \Rightarrow A \sqcup B \in \mathcal{D}$$

Lem. Układ Dynkina jest σ-algebrą $\Leftrightarrow$ $\mathcal{D}$ jest zamknięty na przekroje, tzn.

$$A, B \in \mathcal{D} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{D}.$$

Dowód: „$\Rightarrow$" Każda σ-algebra jest zamknięta na „$\cap$".

„$\Leftarrow$" Niech $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{D}$ (niekoniecznie rozłączne).

Położmy

$$B_1 := A_1, \quad B_2 := \underbrace{\underset{\in \mathcal{D}}{A_2} \cap \underset{\in \mathcal{D}}{A_1'}}_{\in \mathcal{D}}, \quad B_3 := \underbrace{A_3 \cap A_2' \cap A_1'}_{\in \mathcal{D}}, \ldots$$

$$B_n := \underbrace{A_n \cap \underset{\in \mathcal{D}}{A_{n-1}'} \cap \ldots \cap \underset{\in \mathcal{D}}{A_1'}}_{\in \mathcal{D}}$$

Wtedy $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ parami rozłączne oraz

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} \underset{\in \mathcal{D}}{B_n} \in \mathcal{D}.$$

Zatem $\mathcal{D}$ jest σ-algebrą. $\blacksquare$

STW.) Dla dowolnej rodziny zbiorów $\mathcal{G} \subseteq 2^X$ istnieje najmniejszy układ Dynkina $\delta(\mathcal{G})$ zawierający $\mathcal{G}$.

Dowód: Naśladować dowód istnienia $\sigma(\mathcal{G})$. $\blacksquare$

Def: $\delta(\mathcal{G})$ nazywamy układem Dynkina generowanym przez $\mathcal{G}$.

Uwaga: Dla każdego $\mathcal{G} \subseteq 2^X$

$$\delta(\mathcal{G}) \subseteq \sigma(\mathcal{G}).$$

Tw.) (Twierdzenie Dynkina)
Jeżeli $\mathcal{G} \subseteq 2^X$ jest zamknięta na „$\cap$”, to

$$\delta(\mathcal{G}) = \sigma(\mathcal{G}).$$

Dowód: Skoro $\delta(\mathcal{G}) \subseteq \sigma(\mathcal{G})$, to wystarczy pokazać, że $\delta(\mathcal{G})$ jest σ-algebrą, co w świetle poprzedniego Lematu jest równoważne temu, że $\delta(\mathcal{G})$ jest zamknięta na „$\cap$".

W tym celu zastosujemy następujący

<u>Lemat</u> Jeśli $\mathcal{D}$ - układ Dynkina oraz $A \in \mathcal{D}$, to

$$\mathcal{D}_A = \{B \subseteq X : B \cap A \in \mathcal{D}\}$$

jest układem Dynkina na X.

Dowód Lematu: (D1) $X \cap A = A \in \mathcal{D} \Rightarrow X \in \mathcal{D}_A$

(D2) $B \in \mathcal{D}_A \Rightarrow B' \cap A \overset{\text{De Morgan}}{=} (B \cup A')' = \Big(\underbrace{\underbrace{B \cap A}_{\in \mathcal{D}} \cup \underbrace{A'}_{\in \mathcal{D}}}_{\in \mathcal{D}}\Big)' \in \mathcal{D}$

bo $B \in \mathcal{D}_A \longrightarrow$

$$\Rightarrow B' \in \mathcal{D}_A.$$

(D3) Niech $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{D}_A$ parami rozłączne. Wtedy

$$\left(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \cap A = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} \underbrace{(A_n \cap A)}_{\in \mathcal{D} \text{ bo } A_n \in \mathcal{D}_A} \in \mathcal{D}. \text{ Stąd } \bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{D}_A. \blacksquare$$

Dowód Tw.:

$\mathcal{G}$ zamknięta na „$\cap$" $\Longrightarrow$ $\delta(\mathcal{G})$ zamknięta na „$\cap$".

$$A \in \mathcal{G} \Rightarrow \mathcal{G} \subseteq \delta(\mathcal{G})_A := \{B \subseteq X : B \cap A \in \delta(\mathcal{G})\}$$

(jeśli $B \in \mathcal{G}$, to $B \cap A \in \mathcal{G} \subseteq \delta(\mathcal{G})$)

(jeżeli $B \in \mathcal{G}$, to $B \cap A \in \mathcal{G} \subseteq \delta(\mathcal{G})$)

Z lematu $\delta(\mathcal{G})|_A$ układ Dynkina. Zatem

$$\delta(\mathcal{G}) \subseteq \delta(\mathcal{G})|_A.$$ To oznacza

$$\forall_{B \in \delta(\mathcal{G})} \quad B \cap A \in \delta(\mathcal{G}).$$

Zauważmy dalej, że

$$B \in \delta(\mathcal{G}) \Rightarrow \forall_{A \in \mathcal{G}} \; B \cap A \in \delta(\mathcal{G}) \Rightarrow \mathcal{G} \subseteq \delta(\mathcal{G})|_B$$

$$\xRightarrow[\substack{\delta(\mathcal{G})|_B \\ \text{Dynkin}}]{\text{lemat}} \delta(\mathcal{G}) \subseteq \delta(\mathcal{G})|_B \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall_{A \in \delta(\mathcal{G})} \quad A \cap B \in \delta(\mathcal{G}). \quad \blacksquare$$

$\boxed{\text{Tw}}$ (Jednoznaczność miary)

Niech $(X, \mathcal{F})$ prz. mierzalna (czyli $\mathcal{F} \subseteq 2^X$ σ-algebra), $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{G})$ generowana przez $\mathcal{G} \subseteq 2^X$ t. że

(*) $\mathcal{G}$ jest zamknięta na „$\cap$"

(**) $\exists_{\{X_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{G}} \quad X_n \nearrow X$ $\left(\text{tzn } X_1 \subseteq X_2 \subseteq X_3 \ldots \quad X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n\right)$

Jeżeli μ i ν są miarami na $(X, \mathcal{F})$ t. że μ i ν pokrywają się na $\mathcal{G}$ oraz są skończone na zbiorach X_n z warunku (**), to

$$\mu = \nu \qquad (\text{na } \mathcal{F}).$$

Dowód: Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ połóżmy

$$\mathcal{D}_n := \{ A \in \mathcal{F} : \mu(X_n \cap A) = \nu(X_n \cap A) \}.$$

Zauważmy, że $\mathcal{D}_n$ to układ Dynkina:

(D1) $\mu(X_n \cap X) = \mu(\underset{\mathcal{G}}{X_n}) = \nu(X_n) = \nu(X_n \cap X)$

$\Rightarrow X \in \mathcal{D}_n$

(D2) Niech $A \in \mathcal{D}_n$. Wtedy

$$\mu(X_n \cap A') = \mu(X_n \setminus A) = \mu(X_n \setminus (A \cap X_n)) \underset{\mu(X_n) < \infty}{\overset{\text{wzór na różnicę}}{=}}$$

$$= \mu(\underset{\mathcal{G}}{X_n}) - \mu(\underset{\mathcal{D}_n}{A} \cap X_n) = \nu(X_n) - \nu(A \cap X_n) \underset{\text{różnicy}}{\overset{\text{wzór na}}{=}}$$

$$= \nu(X_n \setminus A \cap X_n) = \nu(X_n \cap A')$$

Stąd $A' \in \mathcal{D}_n$.

(D3) Niech $\{A_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{D}_n$ parami rozłączne. Wtedy

$$\mu(X_n \cap \bigsqcup_{k=1}^{\infty} A_k) = \mu(\bigsqcup_{k=1}^{\infty} X_n \cap A_k) \overset{\sigma\text{-addytywność}}{=}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \mu(X_n \cap \underset{\mathcal{D}_n}{A_k}) = \sum_{k=1}^{\infty} \nu(X_n \cap A_k) \overset{\sigma\text{-addyt.}}{=}$$

$$= \nu(\bigsqcup_{k} X_n \cap A_k) = \nu(X_n \cap \bigsqcup_{k=1}^{\infty} A_k).$$

Czyli $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{D}_n$.

Teraz

$$\mu|_{\mathcal{G}} = \nu|_{\mathcal{G}} \Rightarrow \mathcal{G} \subseteq \mathcal{D}_n \xRightarrow[\text{układem Dynkina}]{\mathcal{D}_n \text{ jest}} \delta(\mathcal{G}) \subseteq \mathcal{D}_n$$

ale $\mathcal{G}$ jest zamknięte na „$\cap$" (patrz (*)), więc na mocy Tw. Dynkina $\delta(\mathcal{G}) = \sigma(\mathcal{G}) = \mathcal{F}$

Zatem

$$\forall_{n \in \mathbb{N}} \quad \mathcal{F} \subseteq \mathcal{D}_n$$

W szczególności dla dowolnego $A \in \mathcal{F}$ mamy

$$\mu(A) = \mu(A \cap \underbrace{\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n}_{= X}) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n \cap A\right) \overset{X_n \cap A \nearrow A}{\underset{\text{ciągłości miary } \mu}{=}}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \mu(\underbrace{X_n \cap A}_{\in \mathcal{D}_n}) = \lim_{n \to \infty} \nu(X_n \cap A) =$$

$$= \nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n \cap A\right) = \nu(A). \quad \blacksquare$$