Wykład 4

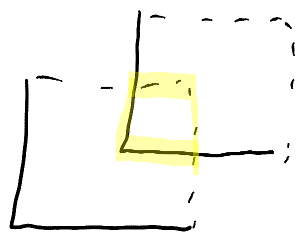
3 listopada 2020

07:49

Wnioski z jednoznaczności i istnienia

WN1) Miara Lebesgue'a λ^n na $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ jest jednoznacznie wyznaczona przez warunek

$$\forall_{\substack{[a_1,b_1)\times\ldots\times[a_n,b_n)\in\mathcal{J}_{wym} \\ a_i,b_i\in\mathbb{Q}}} \quad \lambda^n([a_1,b_1)\times\ldots\times[a_n,b_n)) = \prod_{i=1}^{n}(b_i-a_i)$$



Dowód: $\mathcal{J}_{wym}$ są zamknięte na „$\cap$". Ponadto np. $X_j = [-j,j)^n$ mamy

$$X_1 \subseteq X_2 \subseteq X_3 \subseteq \ldots \qquad \mathbb{R}^n = \bigcup_{j=1}^{\infty} X_j$$

Jako że $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \sigma(\mathcal{J}_{wym})$, to na mocy Tw. o jednozn. wnioskujemy dla dow. miary $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0,+\infty]$ takiej, że

$$\forall_{I\in\mathcal{J}_{wym}} \quad \lambda^n(I) = \mu(I) \quad \text{mamy } \mu = \lambda^n \ \blacksquare$$

WN2) Miara Lebesgue'a λ^n jest niezmiennicza ze względu na przesunięcia:

$$\forall_{B\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)} \ \forall_{x\in\mathbb{R}^n} \quad \lambda^n(B) = \lambda^n(x+B)$$

$$\boxed{x+B := \{x+y : y\in B\}}$$

Dowód: Zauważmy, że $x+B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ dla każdego $B\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$? Rzeczywiście

$$\mathcal{F}_x := \{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) : x + A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\}$$

jest σ-algebrą oraz $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{F}_x$. Zatem

$\uparrow$ prostopadł.

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \sigma(\mathcal{J}) \subseteq \mathcal{F}_x.$$

Zdefiniujmy miarę ν wzorem

$$\forall_{B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)} \quad \nu(B) := \lambda^n(x + B).$$

(M1) $\nu(\emptyset) = \lambda^n(x + \emptyset) = \lambda^n(\emptyset) = 0$

(M2) $\left.\begin{array}{l}\{B_j\}_{j=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \\ B_i \cap B_j = \emptyset \ i \neq j\end{array}\right\} \Rightarrow \nu\left(\bigsqcup_{j=1}^{\infty} B_j\right) = \lambda^n\left(x + \bigsqcup_{j=1}^{\infty} B_j\right) =$

$$= \lambda^n\left(\bigsqcup_{j=1}^{\infty} x + B_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^n(x + B_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \nu(B_j)$$

Dla każdego

$$I = [a_1, b_1) \times \ldots \times [a_n, b_n) \in \mathcal{J}$$

mamy

$$\nu(I) = \lambda^n(x + I) = \lambda^n([a_1 + x_1, b_1 + x_1) \times [a_2 + x_2, b_2 + x_2) \times \ldots$$
$$\ldots [a_n + x_n, b_n + x_n)) =$$
$$= \prod_{i=1}^{n}\left(b_i + \cancel{x_i} - (a_i + \cancel{x_i})\right) = \prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i) = \lambda^n(I).$$

Czyli na mocy Tw. o jednoznaczności $\nu = \lambda^n$ na $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ ∎

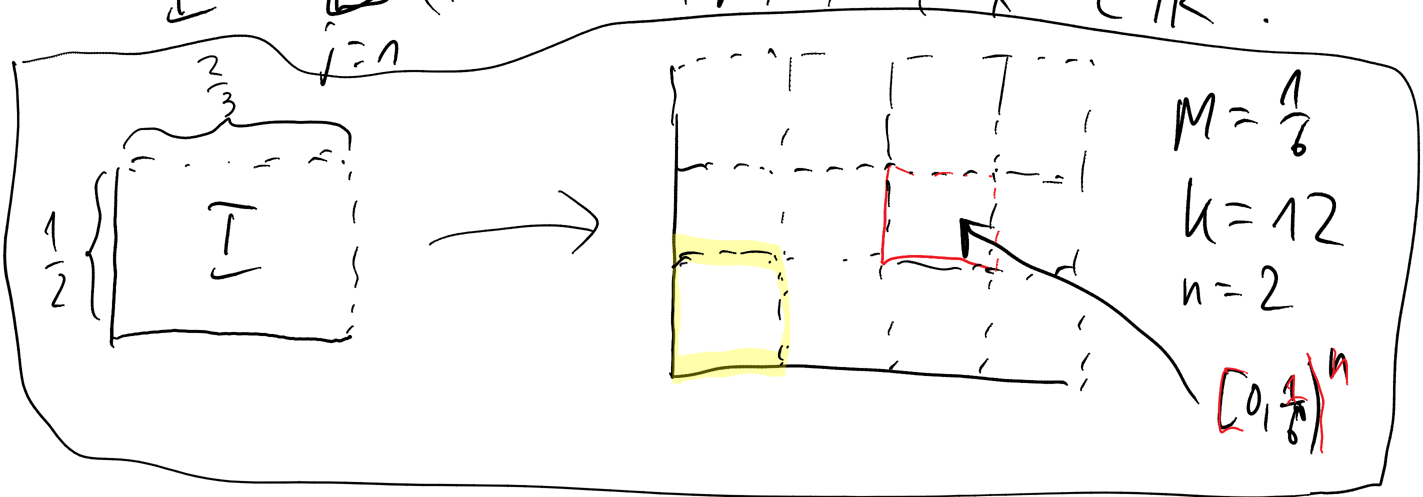
$\boxed{\text{WN3}}$ Dla każdej miary μ na $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$, która jest niezmiennicza ze względu na przesunięcia oraz $c := \mu([0,1)^n) < \infty$, to

$$\mu = c \cdot \lambda^n$$

(μ jest wielokrotnością miary Lebesgue'a).

Dowód: Niech $I = [a_1, b_1) \times \ldots \times [a_n, b_n) \in \mathcal{J}_{wym}$, $a_i, b_i \in \mathbb{Q}$. Niech M będzie wspólnym mianownikiem dla wszystkich a_i, b_i. Wtedy

$$I = \bigsqcup_{j=1}^{k} \left(x^{(j)} + [0, \tfrac{1}{M})^n\right) \quad \text{dla pewnego } k \in \mathbb{N} \text{ i } x^{(j)} \in \mathbb{R}^n.$$



Korzystając z niezmienniczości ze względu na przesunięcia oraz addytywności otrzymujemy

$$\mu(I) = \sum_{j=1}^{k} \mu\left(x^{(j)} + [0, \tfrac{1}{M})^n\right) = \sum_{j=1}^{k} \mu\left([0, \tfrac{1}{M})^n\right) = k \cdot \mu\left([0, \tfrac{1}{M})^n\right)$$

oraz

$$c = \mu([0,1)^n) = \mu\left(\bigsqcup_{j=1}^{M^n} y^{(j)} + [0, \tfrac{1}{M})^n\right) = \sum_{j=1}^{M^n} \mu\left([0, \tfrac{1}{M})^n\right)$$

$c = \mu([0,1)^n) = \mu(\bigcup_{j=1} \ldots)$ $\ldots \mu(\ldots M))$

$= M^n \mu([0,\frac{1}{M})^n)$

Stąd dzieląc obustronnie

$$\frac{\mu(I)}{c} = \frac{K}{M^n} \qquad (\cdot)$$

Zauważmy, że powyższe obliczenia możemy też zastosować do miary λ^n i wtedy (stąd, że $\lambda^n([0,1)^n) = 1$) dostajemy

$$\frac{\lambda^n(I)}{1} = \frac{K}{M^n} \qquad (\cdot\cdot)$$

$$(\cdot) + (\cdot\cdot) \Rightarrow \mu(I) = c\lambda^n(I).$$

Zatem na mocy Tw. o jednoznaczności mamy

$\mu = c\lambda^n$ na $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. $\blacksquare$

Istnienie Miar

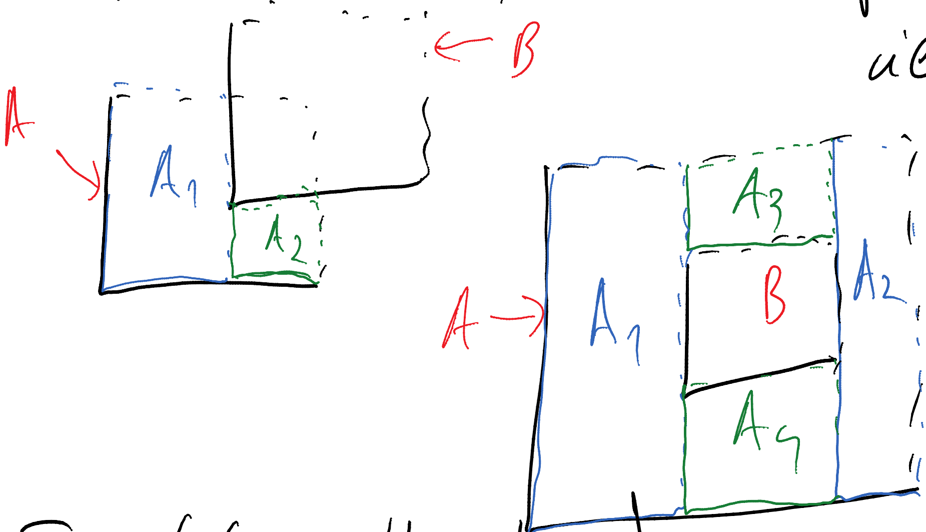
Def: Półpierścieniem zbiorów nazywamy rodzinę $S \subseteq 2^X$ taką, że

(S_1) $\emptyset \in S$

(S_2) $A, B \in S \Rightarrow A \cap B \in S$

(S_3) $A, B \in S \Rightarrow \exists$ $A_1, \dots, A_n \in S$ parami rozłączne $\quad A \setminus B = \bigsqcup_{i=1}^{n} A_i$

Przykład (Modelowy) $S = \{$ rodzina prostopadłościanów półotwartych $\}$ jest półpierścieniem.



Tw. (Caratheodory).
Niech S półpierścień na X oraz $\mu : S \to [0, +\infty)$ pre-miara, tzn.

(M1) $\mu(\emptyset) = 0$

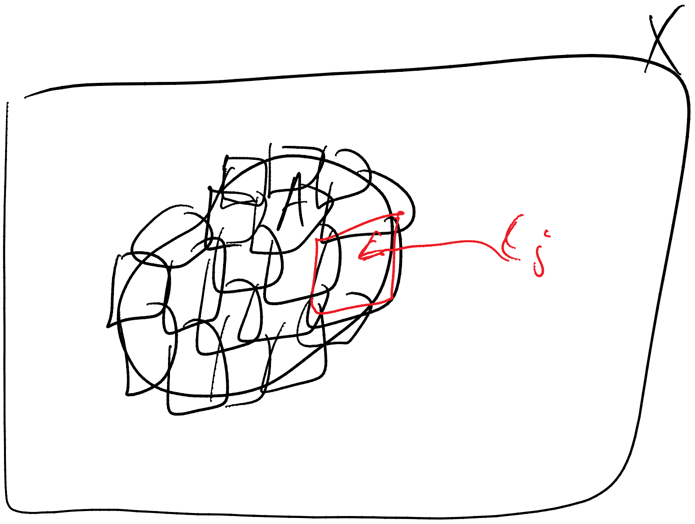
(M2) $\left.\begin{array}{l} \{A_j\}_{j=1}^{\infty} \subseteq S \\ \text{parami rozłączne} \\ \bigsqcup_{j=1}^{\infty} A_j \in S \end{array}\right\} \Rightarrow \mu\left(\bigsqcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)$

Wtedy μ przedłuża się do miary
$\mu : \sigma(S) \to [0, +\infty]$.

(W szczególności, jeżeli $\exists \{X_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq S$ t.że w szczególności jeśli $\exists \{X_j\}_{j=1}^{\infty} \subseteq S$ t.ż. $X_j \nearrow X$ oraz $\mu(X_j) < \infty$, to przedłużenie $\mu : \sigma(S) \to [0,+\infty]$ jest dokładnie jedno

Zdefiniujmy $\mu^* : 2^X \to [0,+\infty]$ wzorem

$$\mu^*(A) = \inf\left\{\sum_{j=1}^{\infty} \mu(C_j) : C_j \in S,\ A \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} C_j\right\}$$



Def: μ^* taką jak wyżej nazywamy **miarą zewnętrzną** generowaną przez μ

Dowód Tw. Caratheodoriego będzie przebiegał w 4 krokach (4 lematach)

$\boxed{\text{Lem 1}}$ Miara zewnętrzna ma następujące własności

(OM1) $\mu^*(\emptyset) = 0$ (niezdegenerowanie)

(OM2) $A \subseteq B \Rightarrow \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$ (monotoniczność)

(OM3) $\mu^*\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(A_j)$ (σ-subaddytywność)

Dowód: $\emptyset$ można pokryć zbiorami pustymi

Dowód: $\emptyset$ można pokryć zbiorami pustymi

$C_1 = C_2 = C_3 = \ldots = \emptyset \in S$. Zatem

(OM1) $\mu^*(\emptyset) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(\emptyset) = 0 \Rightarrow \mu^*(\emptyset) = 0$.

(OM2) Niech $A \subseteq B$. Jeśli $\{C_j\}_{j=1}^{\infty} \in S$ jest t.że $B \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} C_j$, to $A \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} C_j$. Stąd

$$\mu^*(B) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \mu(C_j) : B \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} C_j \right\} \geq$$

$$\geq \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \mu(C_j) : A \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} C_j \right\} = \mu^*(A)$$

(OM3) Możemy założyć, że $\mu^*(A_j) < +\infty$ dla każdego $j \in \mathbb{N}$. Ustalmy $\varepsilon > 0$. Wtedy dla każdego $j \in \mathbb{N}$ istnieje $\{C_k^j\}_{k=1}^{\infty} \subseteq S$ t. że

$$A_j \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} C_k^j \quad \text{oraz} \quad \boxed{\mu^*(A_j) \geq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(C_k^j) - \frac{\varepsilon}{2^j}}$$

Wtedy ciąg $\{C_k^j\}_{k=1, j=1}^{\infty, \infty} \subseteq S$ jest pokryciem $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ i stąd

$$\mu^*\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) \leq \sum_{k,j=1}^{\infty} \mu(C_k^j) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \mu(C_k^j) \leq$$

$$\leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(A_j) + \frac{\varepsilon}{2^j} = \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(A_j) + \varepsilon$$

Z dowolności $\varepsilon > 0$ dostajemy

$$\mu^*\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(A_j) \quad \blacksquare$$

Uwaga: Miary zewnętrzne definiuje się też często aksjomatycznie jako funkcje $\mu^*: 2^X \to [0,+\infty]$ spełniające (OM1), (OM2), (OM3).