Wykład 5

10 listopada 2020

07:57

Dowód Tw. Carathéodory'ego

<u>Lem 2</u> Niech $\mu: S \to [0,+\infty]$ pre-miara określona na półpierścieniu S. Rodzina

$$P(S) := \{ A_1 \sqcup A_2 \sqcup \ldots \sqcup A_n : \{A_i\}_{i=1}^n \subseteq S \}$$

← skończone sumy zbiorów rozłącznych z S

jest pierścieniem (generowanym przez półpierścień S) oraz $\mu^*|_{P(S)}$ jest pre-miarą na $P(S)$ daną wz.

$$\mu^*(A_1 \sqcup A_2 \sqcup \ldots \sqcup A_n) = \sum_{i=1}^n \mu(A_i)$$

<u>Wniosek</u> μ^* jest rozszerzeniem μ, tzn $\mu^*|_S = \mu$.

<u>Dowód Lem 2</u>: Pokażemy, że $P(S)$ jest zamknięta na przecięcia, różnice i sumy

Niech $A = A_1 \sqcup \ldots \sqcup A_n$ i $B = B_1 \sqcup B_2 \sqcup \ldots \sqcup B_m$

$\{A_i\}_{i=1}^n, \{B_j\}_{j=1}^m \subseteq S$. Wtedy

$$A \cap B = \bigsqcup_{i,j=1}^{n,m} \underbrace{A_i \cap B_j}_{\in S} \in P(S) \quad (*)$$

rodzina $P(S)$ jest zamknięta na przekroje

$$A \setminus B = \bigsqcup_{i=1}^n A_i \setminus B = \bigsqcup_{i=1}^n A_i \cap \Big(\bigsqcup_{j=1}^m B_j\Big)' = \bigsqcup_{i=1}^n \bigcap_{j=1}^m A_i \cap B_j'$$

$$= \bigsqcup_{i=1}^n \bigcap_{j=1}^m \underbrace{\underset{S}{A_i} \setminus \underset{S}{B_j}}_{\in P(S) \text{ bo pseudoróżnica}} \in P(S)$$

$(**)$ rodzina $P(S)$ jest zamknięta na różnice

$$\underbrace{\qquad}_{\in P(S)\ 2\ (*)}$$

$$A \cup B = \underbrace{\underset{\in P(S)}{A} \setminus \underset{\in P(S)}{B}}_{\in P(S)\ 2\ (**)} \sqcup \underset{\in P(S)}{B} \in P(S)$$

Zatem $P(S)$ pierścień.

Pokażemy, że funkcja $\bar{\mu} : P(S) \to [0,+\infty]$ dana wzorem

$$\bar{\mu}(A_1 \sqcup A_2 \sqcup \ldots \sqcup A_n) := \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)$$

jest σ-addytywna. Jest ona poprawnie określona, bo

$$A_1 \sqcup A_2 \sqcup \ldots \sqcup A_n = B_1 \sqcup B_2 \sqcup \ldots \sqcup B_m \implies$$

$$\sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) = \sum_{i=1}^{n} \mu\Big(\bigsqcup_{j=1}^{m} \underbrace{A_i \cap B_j}_{\in S}\Big) \overset{\text{addytywność } \mu}{=\!=\!=} \sum_{i=1,\,j=1}^{n,m} \mu(A_i \cap B_j) \overset{\text{addytyw.}}{\underset{\mu}{=\!=}}$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \mu\Big(\bigsqcup_{i=1}^{n} A_i \cap B_j\Big) = \sum_{j=1}^{m} \mu(B_j).$$

Niech $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq P(S)$ będą parami rozłączne i takie, że $A := \bigsqcup_{k=1}^{\infty} A_k \in P(S)$. Wtedy istnieją zb. $\{C_j\}_{j=1}^{\infty} \subseteq S$ t.że

$$A_k = \bigsqcup_{j=n_{k-1}+1}^{n_k} C_j, \qquad k = 1,2,3,\ldots \qquad (n_0 = 0)$$

$$\left\{ A_1 = C_1 \sqcup \ldots \sqcup C_{n_1},\ A_2 = C_{n_1+1} \sqcup C_{n_1+2} \sqcup \ldots \sqcup C_{n_2} \right.$$
$$\left. \ldots \right\}$$

$| \qquad --- \qquad)$

owz istnieją zb. $\{D_i\}_{i=1}^{N} \subseteq S$ t. że $A = \bigsqcup_{i=1}^{N} D_i$

stąd

$$\overline{\mu}(A) \overset{def}{=} \sum_{i=1}^{N} \mu(D_i) \underset{A=\bigcup_{j=1}^{\infty} C_j}{=} \sum_{i=1}^{N} \mu\Big(\overbrace{\bigcup_{j=1}^{\infty} \underbrace{C_j \cap D_i}_{\in S}}^{= D_i \in S}\Big) \underset{\mu}{\overset{\sigma\text{-addytywność}}{=}}$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{\infty} \mu(C_j \cap D_i) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{N} \mu(C_j \cap D_i) \underset{\mu}{\overset{\text{addytywność}}{=}}$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \mu\Big(\underbrace{\bigcup_{i=1}^{N} C_j \cap D_i}_{= C_j}\Big) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(C_j) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=n_{k-1}+1}^{n_k} \mu(C_j)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \overline{\mu}(A_k)$$

Czyli $\overline{\mu} : P(S) \longrightarrow [0, +\infty]$ jest pre-miarą.

Jasne jest, że

$$\forall_{A \in P(S)} \quad \mu^*(A) \le \overline{\mu}(A),$$ bo jeśli $A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots A_n$ gdzie $A_i \in S$, $i = 1, \ldots n$,

to $\overline{\mu}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)$ i $\{A_i\}_{i=1}^{n}$ jest pokryciem A

Z drugiej strony, jeśli $\{C_j\}_{j=1}^{\infty} \subseteq S$ jest jakimś pokryciem zb. A $\left(A \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} C_j\right)$, to

$$\overline{\mu}(A) = \overline{\mu}\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} C_j \cap A\Big) \underset{\text{premiary } \mu}{\overset{\sigma\text{-subaddytywność}}{\le}} \sum_{j=1}^{\infty} \overline{\mu}(C_j \cap A) \underset{\text{pre-miary}}{\overset{\text{monotoniczność}}{\le}}$$

$$\sum^{\infty}$$

$$\bar{\mu}(A) = \bar{\mu}\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} C_j \cap A\right) \underset{\text{przeliczalna premiary } \mu}{\overset{\sigma\text{-subaddytywność}}{\leq}} \sum_{j=1}^{\infty} \bar{\mu}(C_j \cap A) \underset{\text{pre-miary}}{\overset{\text{monotoniczność}}{\leq}}$$

$$\leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(C_j)$$

Stąd $\bar{\mu}(A) \leq \mu^*(A)$. Czyli $\bar{\mu}(A) = \mu^*(A)$ $\boxed{B}$

Lem 3 Półpierścień S jest zawarty w

$$\mathcal{F} = \{A \subseteq X : \underbrace{\forall_{B \subseteq X} \; \mu^*(B) = \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \setminus A)}_{\text{warunek Caratheodory'ego (C)}}\}$$

Uwaga: Na mocy subaddytywności miary zewnętrznej

A spełnia (C) $\iff \forall_{B \subseteq X} \; \mu^*(B) \geq \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \setminus A)$

Dowód: Niech $A \in S$. Niech $B \subseteq X$ i niech $\{C_j\}_{j=1}^{\infty} \subseteq S$ pokrycie zb. B $(B \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} C_j)$. Zauważmy, że

$$C_j = \underbrace{C_j \cap A}_{\in S} \cup \underbrace{C_j}_{\in S} \setminus \underbrace{A}_{\in S} = C_j \cap A \cup \bigcup_{k=1}^{n_j} D_k \text{ dla pewnych } \{D_k\}_{k=1}^{n_j} \subseteq S$$

Stąd

$$\mu^*(C_j \cap A) + \mu^*(\underbrace{C_j \setminus A}_{\bigcup_{k=1}^{n_j} D_k}) \underset{\text{tywność } \mu^*}{\overset{\text{subaddy-}}{\leq}} \mu^*(C_j \cap A) + \sum_{k=1}^{n_j} \mu^*(D_k)$$

$$\overset{\text{Lem 2}}{=} \mu(C_j \cap A) + \sum_{k=1}^{n_j} \mu(D_k) \overset{\text{addytywność}}{=} \mu(C_j) \quad (+)$$

$$\underset{\mu^*|_S=\mu}{=} \mu(C_j\cap A)+\sum_{k=1}^{\infty}\mu(D_k) \xrightarrow[\mu]{\text{addytywność}} \mu(C_j) \quad (+)$$

Zatem

$$\mu^*(B\cap A)+\mu^*(B\setminus A) \overset{\text{monotoniczność}}{\leq} \mu^*\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} C_j\cap A\Big)+\mu^*\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} C_j\setminus A\Big)\leq$$

$$\underset{\text{z przeliczalnej podaddytywności } \mu^*}{\overset{\sigma\text{-subaddytywność}}{\leq}} \sum_{j=1}^{\infty}\mu^*(C_j\cap A)+\sum_{j=1}^{\infty}\mu^*(C_j\setminus A)$$

$$=\sum_{j=1}^{\infty}\mu^*(C_j\cap A)+\mu^*(C_j\setminus A) \overset{(+)}{\leq}$$

$$\leq \sum_{j=1}^{\infty}\mu(C_j)$$

Stąd (biorąc inf po $\{C_j\}_{j=1}^{\infty}$ pokrywających B) mamy

$$\mu^*(B\cap A)+\mu^*(B\setminus A)\leq \mu^*(B) \quad \blacksquare$$

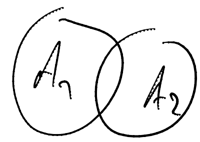
$\boxed{\text{Lem 4}}$ Dla dowolnej miary zewnętrznej μ^* rodzina $\mathcal{F}$ zbiorów spełniających warunek (C) jest σ-algebrą oraz $\mu^*|_{\mathcal{F}}$ jest miarą

Dowód: $A\in\mathcal{F} \iff \forall_{B\subseteq X}\ \mu^*(B) \underset{\geq}{\overset{?}{=}} \mu^*(B\cap A)+\mu^*(B\cap A')$

$A\in\mathcal{F} \Rightarrow A'\in\mathcal{F}$ na mocy symetrii warunku (C)

Czyli $\mathcal{F}$ zamknięta na dopełnienia. Pokażemy że zamknięta na skończone sumy.

że zamknięta na skończone sumy.



Niech $A_1, A_2 \in \mathcal{F}$ i $B \subseteq X$. Wtedy

$$B\cap(A_1\cup A_2) = B\cap A_1\cap A_2 \cup B\cap A_1\cap A_2' \cup B\cap A_1'\cap A_2$$

i z subaddytywności μ^* mamy

$$\mu^*(B\cap(A_1\cup A_2)) + \mu^*(B\cap(A_1\cup A_2)') \le$$

$$\le \underbrace{\mu^*(B\cap A_1\cap A_2)+\mu^*(B\cap A_1\cap A_2')}_{(C)\text{ dla } A_2 \text{ i } B\cap A_1} + \underbrace{\mu^*(B\cap A_1'\cap A_2)+\mu^*(B\cap A_1'\cap A_2')}_{(C)\text{ dla } A_2 \text{ i } B\cap A_1'}$$

$$= \underbrace{\mu^*(B\cap A_1)+\mu^*(B\cap A_1')}_{(C)\text{ dla } A_1 \text{ i zb. } B} = \mu^*(B)$$

Zatem $A_1\cup A_2$ spełnia (C). Czyli $A_1, A_2 \in \mathcal{F}$.

Niech teraz $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{F}$ parami rozłączne.

Dla $B\subseteq X$ oraz $n\in\mathbb{N}$ mamy

$$\mu^*\Big(B\cap\bigcup_{i=1}^n A_i\Big) \overset{(C)\text{ dla } A_n}{=\!=\!=} \mu^*\Big(B\cap\bigcup_{i=1}^n A_i\cap A_n\Big) +$$

$$+\mu^*\Big(B\cap\bigcup_{i=1}^n A_i\cap A_n'\Big) = \mu^*(B\cap A_n)+\mu^*\Big(B\cap\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\Big)$$

Iterując (powtarzając) to rozumowanie dostajemy

$$\mu^*\Big(B\cap\bigcup_{i=1}^n A_i\Big) = \sum_{i=1}^n \mu^*(B\cap A_i) \quad (\#)$$

$$\mu^*\left(B\cap\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\mu^*(B\cap A_i) \quad (7)$$

Następnie skoro $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{F}$ (pokazaliśmy zamkniętość $\mathcal{F}$ na skończone sumy) to

$$\mu^*(B) \overset{(C)\text{ dla } \bigcup_{i=1}^{n} A_i}{=\!=\!=} \mu^*\left(B\cap\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) + \mu^*\left(B\cap\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)'\right)$$

$$\overset{(7)}{=} \sum_{i=1}^{n}\mu^*(B\cap A_i) + \mu^*\left(B\cap\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)'\right)$$

$$\underset{\text{ności } \mu^*}{\overset{\text{monotoni}}{\geq}} \sum_{i=1}^{n}\mu^*(B\cap A_i) + \mu^*\left(B\cap\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)'\right)$$

Przechodząc z $n\to\infty$ dostajemy

$$\mu^*(B) \geq \sum_{i=1}^{\infty}\mu^*(B\cap A_i) + \mu^*\left(B\cap\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)'\right) \underset{\text{miary zew. } \mu^*}{\overset{\sigma\text{-subaddytywność}}{\geq}}$$

$$\geq \mu^*\left(B\cap\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) + \mu^*\left(B\cap\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)'\right)$$

Zatem $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$ (spełnia (C))

W szczególności biorąc $B=\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ otrzymujemy z , że

$$\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty}\mu^*(A_i)$$

czyli μ^* jest σ-addytywna na $\mathcal{F}$.

Zauważmy dalej, że $\mathcal{F}$ jest zamknięte na przekroje

$$A, B \in F \Rightarrow A', B' \in F \Rightarrow A' \cup B' \in F \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (A \cap B)' \in F \Rightarrow A \cap B \in F$$

Zatem jeśli $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq F$ dowolne $\begin{pmatrix}\text{niekoniecznie} \\ \text{rozłączne}\end{pmatrix}$, to

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} \underbrace{A_n \cap \underbrace{\Big(\underbrace{\bigcup_{i=1}^{n-1} \underset{\in F}{A_i}}_{\in F}\Big)'}_{\in F}}_{\in F} \in F.$$

czyli F jest σ-algebrą $\blacksquare$