TW. Caratheodory'ego i istnienie miary Lebesgue'a

TW (Caratheodory)
Niech S półpierścień podzb. zb. X i niech $\mu: S \to [0,+\infty]$ będzie pre-miarą (czyli σ-addytywna i $\mu(\emptyset)=0$).
Wtedy μ przedłuża się do miary na σ-algebrę $\sigma(S)$ generowaną przez S.

Dowód: Rozważmy miarę zewnętrzną $\mu^*: 2^X \to [0,+\infty]$

Lemat 2 $\Longrightarrow$ $\mu^*|_S = \mu$

Lemat 3 $\Longrightarrow$ $S \subseteq \mathcal{F}$ – zbiory spełniające (C)

Lemat 4 $\Longrightarrow$ $\mathcal{F}$ σ-algebra i $\mu^*|_{\mathcal{F}}$ jest miarą

Zatem $\sigma(S) \subseteq \mathcal{F}$ i $\mu^*|_{\sigma(S)}$ jest miarą.
Jest to szukane przedłużenie. ∎

STW λ^n zdefiniowana na prostopadłościanach $\mathcal{J}^n$ wzorem

$$\lambda^n([a_1,b_1)\times[a_2,b_2)\times\ldots\times[a_n,b_n)) = \prod_{i=1}^{n}(b_i-a_i)$$

jest pre-miarą.

Wniosek: λ^n przedłuża się (i to w sposób jednoznaczny) do miary na $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$.

Dowód wniosku: Zastosować Tw. Caratheodory'ego oraz fakt że $\sigma(\mathcal{J}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. $\blacksquare$"

Dowód STWIERDZENIA: Dla uproszczenia notacji załóżmy, że $n=1$. To że $\lambda(\emptyset)=0$ wynika ze wzoru.
Aby wykazać σ-addytywność λ^n weźmy $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{J}$ parami rozłączne i takie, że $A := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{J}$.
Wtedy $A = [a,b)$ i $A_n = [c_n, d_n)$ dla pewnych a, b, c_n, d_n.
Chcemy pokazać, że

$$\underset{|b-a|}{\lambda(A)} = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n) \qquad (*)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} |d_n - c_n|$$

Zauważmy, że $\lambda(A) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n)$ bo z monotoniczności λ i skończonej addytywności mamy

$$\lambda(A) \geq \sum_{n=1}^{N} \lambda(A_n) \xrightarrow[N\to\infty]{} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n)$$

Zatem cały dowód sprowadza się do wykazania nierówności

$$|b-a| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |d_n - c_n|$$

$$\lambda([a,b)) = |b-a|, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} |d_n - c_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda([c_n, d_n))$$

$$\left\{ [a,b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} [c_n, d_n) \right.$$

Ustalmy $\varepsilon > 0$. Rozszerzmy przedziały $[c_n, d_n)$ do przedziałów otwartych

$$A_{n,\varepsilon} := \left(c_n - \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}, d_n\right)$$

Natomiast przedział $A = [a, b)$ zawężmy do przedziału

$$A_\varepsilon = \left[a, b - \frac{\varepsilon}{2}\right].$$

Wtedy

$$\underset{\text{zwarty}}{A_\varepsilon} \subseteq A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_{n,\varepsilon} \quad \leftarrow \text{zb. otwarte}$$

Z Tw. Heinego-Borela istnieje N t. że

$$A_\varepsilon \subseteq \bigcup_{n=1}^{N} A_{n,\varepsilon}$$

Na mocy subaddytywności λ mamy

$$\left|b - \frac{\varepsilon}{2} - a\right| \leq \sum_{n=1}^{N} \left|c_n - \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} - d_n\right|$$

$$b - a - \frac{\varepsilon}{2} \leq \sum_{n=1}^{N} d_n - c_n + \varepsilon\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \frac{1}{2^{N+1}}}{1 - \frac{1}{2}}\right)$$

$$b - a \leq \sum_{n=1}^{N} c_n - d_n + \varepsilon\left(1 - \frac{1}{2^{N+1}} - \frac{1}{2}\right) \leq$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} c_n - d_n + \varepsilon$$

$$\leq \sum_{n=1}^{l} c_n - d_n + \varepsilon$$

Z dowolności ε dostajemy $b-a \leq \sum_{n=1}^{\infty} c_n - d_n$ $\blacksquare$