Wykład 7

17 listopada 2020

08:58

Funkcje mierzalne

i obraz miary

Def: Niech $(X, \mathcal{F})$ i $(X', \mathcal{F}')$ przestrzenie mierzalne (tzn. $\mathcal{F}, \mathcal{F}'$ są σ-algebrami na X i X' odp.)

Powiemy, że funkcja $T: X \to X'$ jest mierzalna (lub $\mathcal{F}$-$\mathcal{F}'$-mierzalna) jeśli

$$\forall_{A \in \mathcal{F}'} \quad T^{-1}(A) \in \mathcal{F}$$

(przeciwobraz zb. mierzalnego jest zb. mierzalnym)

Lemat: Jeśli $\mathcal{F}' = \sigma(\mathcal{G})$ jest generowana przez rodzinę $\mathcal{G} \subseteq 2^{X'}$, to

$$T: X \to X' \text{ mierzalne} \iff \forall_{A \in \mathcal{G}} \quad T^{-1}(A) \in \mathcal{F}$$

Dowód: „$\Rightarrow$" jasne

„$\Leftarrow$" Połóżmy

$$\Sigma' := \{A \subseteq X' : T^{-1}(A) \in \mathcal{F}\}$$

Stąd, że $\mathcal{F}$ jest σ-algebrą i przeciwobraz zachowuje wszystkie działania teorio-mnogościowe wynika że Σ' jest σ-algebrą. Z założenia

$\mathcal{G} \subseteq \Sigma'$, a stąd $\mathcal{F}' = \sigma(\mathcal{G}) \subseteq \Sigma'$ ∎

STW. Każde ciągłe odwzorowanie

$T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ jest $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$-$\mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$-mierzalne.

Dowód: $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ jest ciągła $\Leftrightarrow$

$\underset{\substack{U \subseteq \mathbb{R}^m \\ \text{otwarte}}}{\forall}$ $T^{-1}(U)$ jest otwarty w $\mathbb{R}^n$ $\Rightarrow$

$\underset{\substack{U \subseteq \mathbb{R}^m \\ \text{otwarte}}}{\forall}$ $T^{-1}(U) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ $\overset{\text{Lemat}}{\Longrightarrow}$ T jest mierzalna ∎

Uwaga: Jest mnóstwo nieciągłych funkcji mierzalnych. W szczególności funkcja charakterystyczna $\mathbb{1}_A$ zbioru mierzalnego $A \subseteq \mathbb{R}$ jest mierzalna, bo dla każdego $B \subseteq \mathbb{R}$

$$\mathbb{1}_A^{-1}(B) = \begin{cases} \emptyset & 0,1 \notin B \\ A' & 0 \in B, 1 \notin B \\ A & 0 \notin B, 1 \in B \\ \mathbb{R} = A \cup A' & 0,1 \in B \end{cases}$$

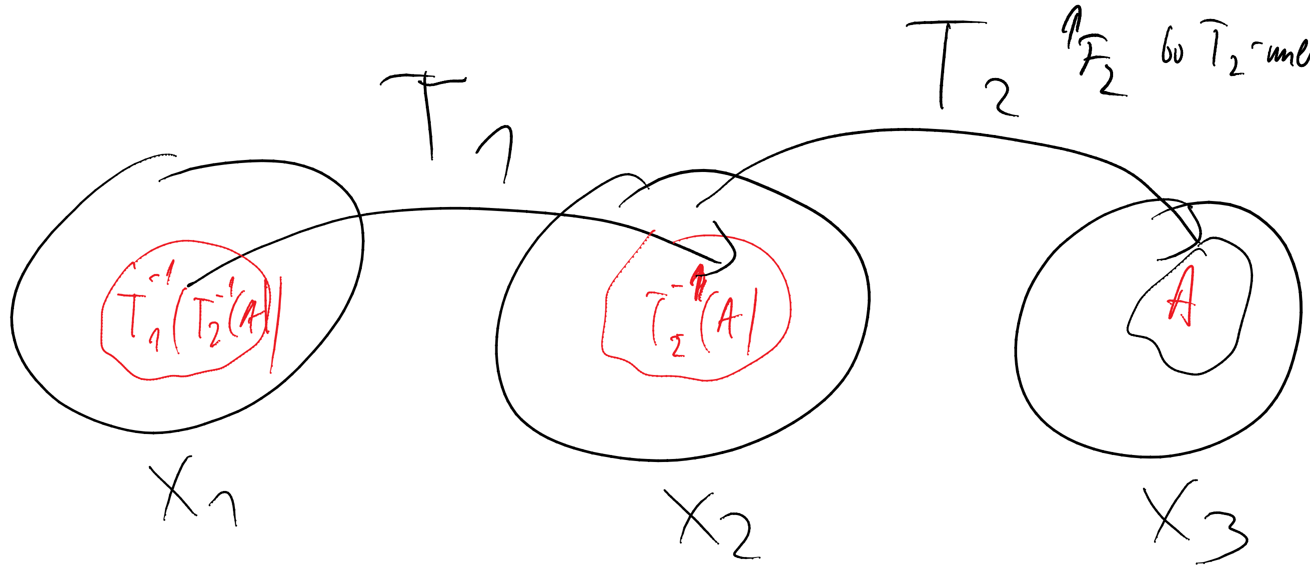
Czyli np. Funkcja Dirichleta $\mathbb{1}_{[0,1] \cap \mathbb{Q}}$ jest

Funkcja mierzalna nieciągła w każdym punkcie $[0,1]$
w szczególności $\mathbb{1}_{[0,1]\cap\mathbb{Q}}$ nie jest całkowalna w sensie Riemanna

STW. Złożenie funkcji mierzalnych jest funkcją mierzalną.

Dowód: $(X_i, \mathcal{F}_i)$, $i=1,2,3$, prz. mierzalne i niech $T_1 : X_1 \to X_2$ oraz $T_2 : X_2 \to X_3$ funkcje mierzalne.
Wtedy dla każdego $A \in \mathcal{F}_3$

$$(T_2 \circ T_1)^{-1}(A) = T_1^{-1}\Big(\underbrace{T_2^{-1}(A)}_{\in \mathcal{F}_2 \text{ bo } T_2 \text{ - mierz.}}\Big) \in \mathcal{F}_1 \text{ bo } T_1 \text{ mierzal.}$$

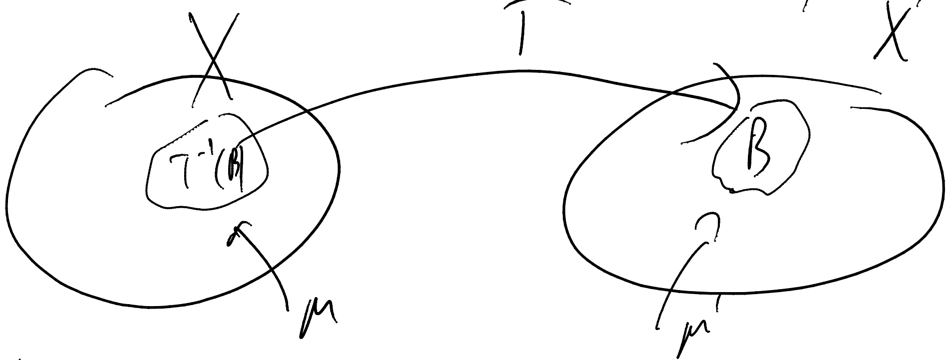


$\square$

STW. Niech $T : X \to X'$ odwzorowanie mierzalne między dwiema prz. mierzalnymi $(X, \mathcal{F}), (X', \mathcal{F}')$.
Dla każdej miary μ na $(X, \mathcal{F})$ wzór

$$\forall_{B \in F'} \quad \mu'(B) := \mu(\underbrace{T^{-1}(B)}_{\in F})$$

definiuje miarę na (X', F')



Dowód:

(M1) $\mu'(\emptyset) = \mu(T^{-1}(\emptyset)) = \mu(\emptyset) = 0$

(M2) Niech $\{B_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq F'$ parami rozłączne, to

$$\mu'\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \mu\left(T^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right)\right) \overset{\text{własności przeciwobrazu}}{=} \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} T^{-1}(B_i)\right) \underset{\mu}{\overset{\sigma\text{-addytywność}}{=}} \sum_{i=1}^{\infty} \mu(T^{-1}(B_i)) \underset{\mu'}{\overset{\text{z def}}{=}} \sum_{i=1}^{\infty} \mu'(B_i). \ \blacksquare$$

Def: Miarę μ' zdefiniowaną powyżej nazywamy **obrazem** miary μ przy odwzorowaniu T i oznaczamy $T(\mu)$ lub $\mu \circ T^{-1}$.

Przykład (Rozkład zmiennej losowej)

Niech (Ω, F, P) przest. probabilistyczna (pr. z miarą gdzie $P(\Omega)=1$)

Niech $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ przest. probabilistyczna (gdzie $P(\Omega)=1$)

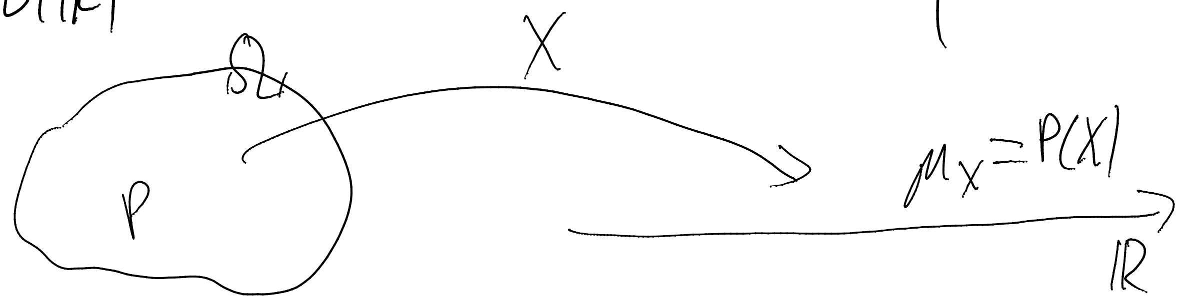
Niech $X: \Omega \to \mathbb{R}$ zmienna losowa (Funkcja mierzalna dokładniej: $\mathcal{F}$-$\mathcal{B}(\mathbb{R})$-mierzalna)

tzn $\forall_{B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})} \quad X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$

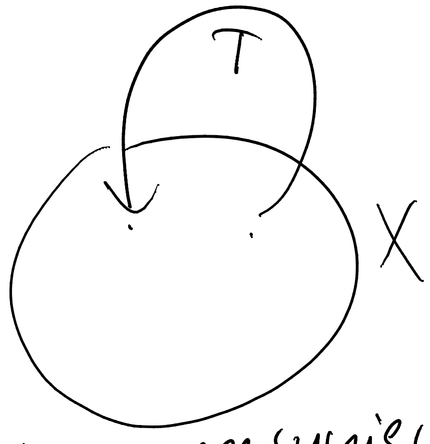
Rozkład zmiennej losowej to obraz P przy X

tzn $\mu_X = P \circ X^{-1}$.

$$\forall_{B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})} \quad \mu_X(B) = P(X \in B) = P(X^{-1}(B)) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\})$$



Def: Niech $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ – pr. z miarą i niech $T: X \to X$ odw. mierzalne. Powiemy, że miara μ jest **niezmiennicza ze względu na T** jeżeli $T(\mu) = \mu$.



Przykład λ^n – n-wymiarowa miara Lebesgue'a jest niezmiennicza ze względu na przesunięcia niezmiennicza ze względu na przesunięcia

$$\forall_{\substack{x\in\mathbb{R}^n \\ B\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)}} \quad \underbrace{\lambda^n(x+B)}_{=T(\lambda^n)(B)} = \lambda^n(B) \qquad \{ T(y) = y - x \}$$

Def: $O(n)$ – zbiór macierzy ortogonalnych $n\times n$.

$$T\in O(n) \iff \overset{\leftarrow\ \text{transpozycja}}{T^t}\cdot T = \underset{\leftarrow\ \text{macierz jednostkowa}}{I}$$

Uwaga/ Macierz T możemy traktować jako odwzorowania liniowe $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$. Macierze ortogonalne zachowują iloczyn skalarny

$$\forall_{x,y\in\mathbb{R}^n} \quad \langle Tx, Ty\rangle = \langle x, \underbrace{T^t\cdot T}_{=I} y\rangle = \langle x, y\rangle$$

$$\left\{ \begin{aligned} &\langle x,y\rangle = \sum_{i=1}^n x_i\cdot y_i, \quad x=(x_1,\dots,x_n),\ y=(y_1,\dots,y_n) \\ &\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \qquad \cos\measuredangle(x,y) = \frac{\langle x,y\rangle}{\|x\|\cdot\|y\|} \end{aligned} \right\}$$

W szczególności odwzorowania (macierze) ortogonalne zachowują odległości i kąty

$$\boxed{\|Tx - Ty\| = \|T(x-y)\| = \sqrt{\langle T(x-y), T(x-y)\rangle} = \sqrt{\langle x-y, x-y\rangle} = \|x-y\|}$$

TW/ $T\in O(n) \Rightarrow \lambda^n = T(\lambda^n)$ – miara Lebesgue'a jest niezmiennicza ...

Tw) $T \in O(n) \Rightarrow \lambda^n = T(\lambda^n)$ jest niezmiennicza ze względu na izometrie liniowe

Dowód: Izometria T jest odwzorowaniem ciągłym, a więc mierzalnym. Niech $x \in \mathbb{R}^n$ i $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Wtedy

$$T(\lambda^n)(x+B) = \lambda^n(\underbrace{T^{-1}}_{\text{liniowe}}(x+B)) = \lambda^n(T^{-1}(x) + T^{-1}(B)) \overset{\text{niezmienniczość } \lambda^n \text{ na przesunięcia}}{=} \lambda^n(T^{-1}(B)) = T(\lambda^n)(B)$$

Czyli miara $T(\lambda^n)$ jest niezmiennicza ze względu na przesunięcia. Zauważmy, że

$$K(0,r) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < r\} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|Tx\| < r\} = \{x \in \mathbb{R}^n : Tx \in K(0,r)\} = T^{-1}(K(0,r))$$

a stąd

$$T(\lambda^n)(K(0,r)) \overset{\text{def } T(\lambda^n)}{=} \lambda^n(T^{-1}(K(0,r))) = \lambda^n(K(0,r))$$

Czyli

1) $T(\lambda^n)$ jest lokalnie skończona

$$T(\lambda^n)(K(0,r)) = \lambda^n(K(0,r)) < \infty$$

Czyli na mocy Tw. $\exists_{c>0}$ $T(\lambda^n) = c\lambda^n$

2) $\left.\begin{array}{l} T(\lambda^n) = c\lambda^n \\ T(\lambda^n)(K(0,r)) = \lambda^n(K(0,r)) \end{array}\right\} \Rightarrow c\lambda^n(K(0,r)) = \lambda^n(K(0,r))$

$\Rightarrow \quad c = 1$ cyli $\quad T(\lambda^n) = \lambda^n \quad \blacksquare$

Def: $GL(n)$ – macierze odwracalne.

$$S \in GL(n) \Leftrightarrow \det(S) \neq 0 \Leftrightarrow S: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \text{ jest bijekcją}$$

Uwaga: $O(n) \subsetneq GL(n)$

Tw. („Zamiana zmiennych" dla miary λ^n)

$$S \in GL(n) \Rightarrow S(\lambda^n) = |\det S^{-1}|\,\lambda^n = \frac{1}{|\det S|}\,\lambda^n.$$

Dowód:

(Krok 1) Załóżmy, że $S = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$ – macierz diagonalna

Jasne jest, że $Dx = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \dots, \lambda_n x_n)$ jest ciągłe a więc mierzalne. Ponadto

$$\det D = \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n, \quad D^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1^{-1} & & 0 \\ & \lambda_2^{-1} & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \lambda_n^{-1} \end{pmatrix}, \quad \det D^{-1} = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i^{-1}$$

Owz

$$D(\lambda^n)([a_1,b_1] \times \ldots \times [a_n,b_n]) = \lambda^n(D^{-1}([a_1,b_1] \times \ldots \times [a_n,b_n])) =$$

$$= \lambda^n(\underbrace{\overbrace{[\lambda_1^{-1} a_1, \lambda_1^{-1} b_1] \times \ldots \times [\lambda_n^{-1} a_n, \lambda_n^{-1} b_n]}^{\text{z uwzględnieniem w zależności}}}_{\text{od znaku } \lambda_i}) = \prod_{i=1}^{n} |\lambda_i^{-1} b_i - \lambda_i^{-1} a_i|$$

$$= \prod_{i=1}^{n} |\lambda_i^{-1}|(b_i - a_i) = \left|\prod_{i=1}^{n} \lambda_i^{-1}\right| \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$$

$$= |\det(D^{-1})|\,\lambda^n([a_1,b_1] \times \ldots \times [a_n,b_n])$$

Zatem $D(\lambda^n) = |\det D^{-1}|\, \lambda^n$ z jednoznaczności miary.

(krok 2) Wykorzystamy znany fakt, że każdą macierz odwracalną $S \in GL(n)$ można przedstawić w postaci

$$S = T_1 D T_2, \quad \text{gdzie } T_1, T_2 \in O(n), \quad D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$

Stąd dla $[a,b) := [a_1, b_1) \times \dots \times [a_n, b_n)$ $\quad a = (a_1 \dots a_n)$, $b = (b_1 \dots b_n)$

$$S(\lambda^n)[a,b) = \lambda^n\left((T_1 D T_2)^{-1}[a,b)\right) = \lambda^n\left(\underset{\text{izometria}}{T_2^{-1}} D^{-1} T_1^{-1}[a,b)\right) \overset{\text{poprzednie twierdzenie}}{=}$$

$$= \lambda^n\left(D^{-1} T_1^{-1}[a,b)\right) \underset{(\text{krok } 1)}{=} \frac{1}{\det D} \lambda^n\left(\underset{\text{izome}}{T_1^{-1}}[a,b)\right) =$$

$$= \frac{1}{\det D} \lambda^n([a,b)).$$

Stąd $S(\lambda^n) = \frac{1}{\det D} \lambda^n$ (na mocy jednoznaczności)

Ponadto $T_1, T_2 \in O(n) \Rightarrow \det(T_1), \det(T_2) \in \{1, -1\}$

$$\boxed{1 = \det(I) = \det(T^t \cdot T) = \det(T^t) \cdot \det(T) = \det(T)^2}$$

Stąd

$$|\det S| = |\det(T_1 D T_2)| = |\det(T_1) \cdot \det D \cdot \det(T_2)|$$

$= \det(D)$

Zatem

$$S(\lambda^n) = \frac{1}{|\det S|}\lambda^n \qquad \blacksquare$$