Rzeczywiste funkcje mierzalne

Niech $(X, \mathcal{F})$ przest. mierzalna

Def: Funkcja $f : X \to \mathbb{R}$ jest mierzalna wtedy gdy jest $\mathcal{F}-\mathcal{B}(\mathbb{R})$ mierzalna, tzn.

$$\forall_{B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})} \quad f^{-1}(B) \in \mathcal{F}.$$

Lem. $f : X \to \mathbb{R}$ jest mierzalna $\iff$ zachodzi jeden (a zatem i wszystkie) z następujących warunków:

(i) $\forall_{a \in \mathbb{R} \text{ (lub } a \in \mathbb{Q})} \quad f^{-1}([a, +\infty)) \in \mathcal{F}$

(ii) $\forall_{a \in \mathbb{R} \text{ (lub } a \in \mathbb{Q})} \quad f^{-1}((a, +\infty)) \in \mathcal{F}$

(iii) $\forall_{a \in \mathbb{R} \text{ (lub } a \in \mathbb{Q})} \quad f^{-1}((-\infty, a]) \in \mathcal{F}$

(iv) $\forall_{a \in \mathbb{R} \text{ (lub } a \in \mathbb{Q})} \quad f^{-1}((-\infty, a)) \in \mathcal{F}$

(v) $\forall_{a, b \in \mathbb{R} \text{ (lub } a, b \in \mathbb{Q})} \quad f^{-1}((a, b)) \in \mathcal{F}$

⋮ wypisać jeszcze z 3 takie warunki

Dowód: (i) zbiory z $\mathcal{G} := \{[a,+\infty) : a \in \mathbb{Q}\}$ generują $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ bo

$$\forall_{a,b\in\mathbb{Q}} \quad [a,b) = \underbrace{[a,+\infty)}_{\in \mathcal{G}} \setminus \underbrace{[b,+\infty)}_{\in \mathcal{G}} \in \sigma(\mathcal{G})$$

A my wiemy, że $[a,b)$, $a,b \in \mathbb{Q}$ generują $\mathcal{B}(\mathbb{R})$

Zatem $\sigma(\mathcal{G}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ to teza wynika z Lematu z wykładu 7.

Dla pozostałych warunków 

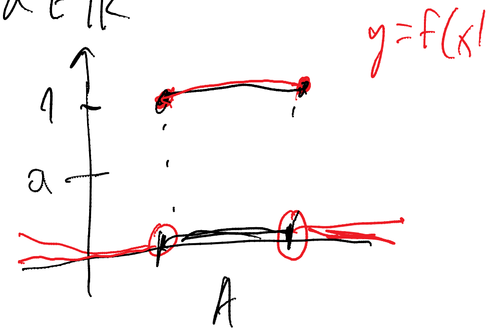
$\boxed{\text{Oznaczenie:}}$ $(X, \mathcal{F})$ - przestrz. mierzalna

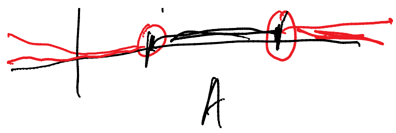
$\mathcal{M}(\mathcal{F})$ - zbiór wszystkich funkcji mierzalnych $f : X \to \mathbb{R}$

<u>Przykłady</u>

(i) Funkcja charakterystyczna $f(x) = \mathbb{1}_A(x)$ jest mierzalna $\iff A \in \mathcal{F}$ (A jest mierzalny)

$$\forall_{a\in\mathbb{R}} \quad f^{-1}([a,+\infty)) = \begin{cases} \emptyset, & a > 1 \\ A, & a \in (0,1] \\ X, & a \le 0 \end{cases}$$





(ii) Funkcja $f: X \to \mathbb{R}$ przyjmująca skończoną liczbę wartości jest mierzalna $\iff$ f jest postaci

$$f(x) = \sum_{j=1}^{m} y_j \mathbb{1}_{A_j}(x) \qquad (*)$$

gdzie $y_1, \dots, y_m \in \mathbb{R}$ oraz $A_1, \dots, A_m \in \mathcal{F}$

Ponadto możemy tu założyć, że zbiory $A_1, \dots A_m$ są parami rozłączne oraz $\{y_i\}_{i=1}^{m}$ wszystkie różne

"$\Rightarrow$" Niech $y_1, \dots, y_m$ wartości funkcji f i połóżmy

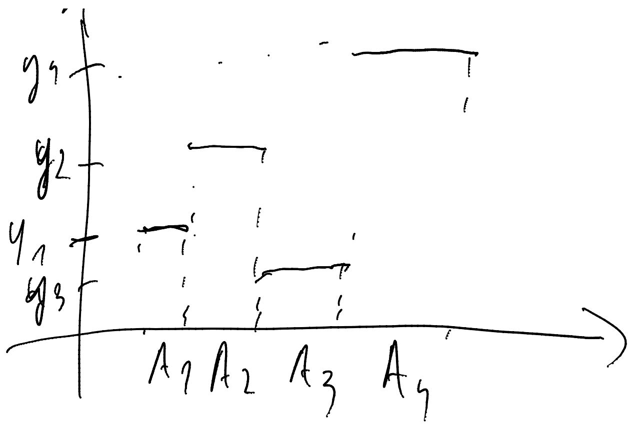
$$A_j = f^{-1}(y_j) = f^{-1}(\underbrace{\{y_j\}}_{\in B(\mathbb{R})}) \in \mathcal{F}$$

Wtedy $f(x) = \sum_{j=1}^{m} y_j \mathbb{1}_{A_j}(x)$, $\{A_j\}_{j=1}^{n}$ parami rozłączne i $y_1, \dots y_m$ różne.

"$\Leftarrow$" Zał. że $\{A_i\}_{i=1}^{m}$ są parami rozłączne mierzalne i $f(x) = \sum_{j=1}^{m} y_j \mathbb{1}_{A_j}(x)$ to $f(\mathbb{R}) = \{y_1, \dots y_m\}$ oraz

$$\forall_{a \in \mathbb{R}} \quad f^{-1}([a, +\infty)) = \bigcup_{y_j \geq a} f^{-1}(y_j) = \bigcup_{y_j \geq a} A_j \in \mathcal{F}$$

Czyli f jest



Czyli f jest mierzalna

Def: Funkcje mierzalne $f: X \to \mathbb{R}$ postaci $(*)$ nazywamy funkcjami prostymi.

Zbiór funkcji prostych oznaczamy $\mathcal{E}(F)$

STW.) Dla dow. $f, g \in \mathcal{E}(F)$ oraz $\lambda \in \mathbb{R}$

(i) $\lambda f \in \mathcal{E}(F)$

(ii) $g + f \in \mathcal{E}(F)$

(iii) $f \cdot g \in \mathcal{E}(F)$

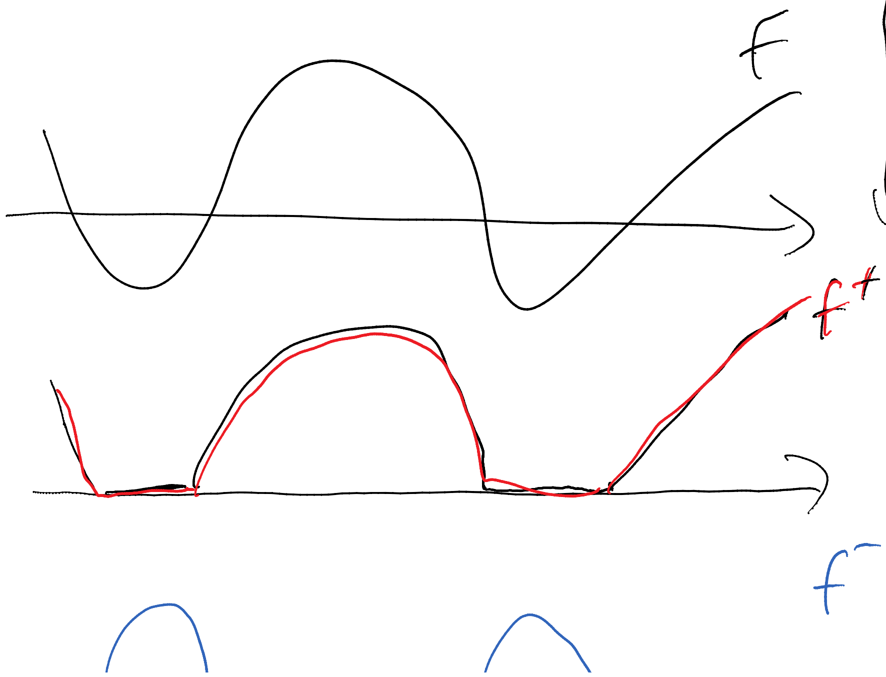
(iv) $f^+, f^-, |f| \in \mathcal{E}(F)$

$\mathcal{E}(F)$ jest algebrą

$f^+(x) = \max\{f(x), 0\}$

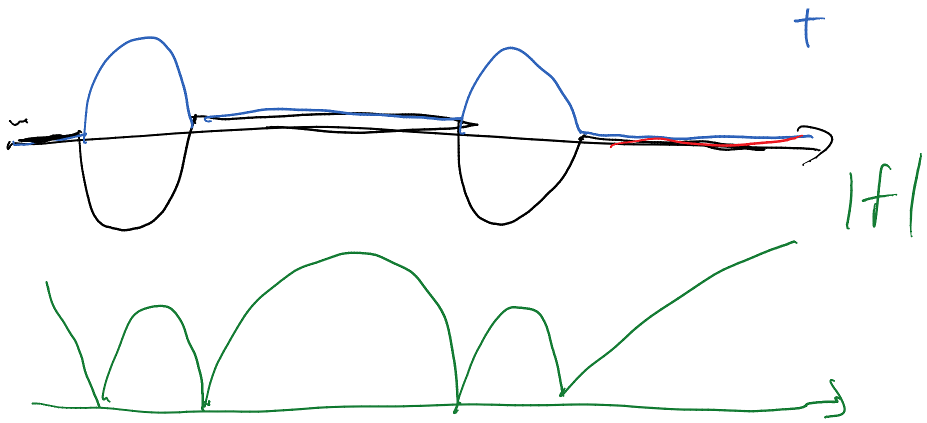
$f^-(x) = \max\{0, -f(x)\}$

$|f(x)| = \max\{f(x), -f(x)\}$



$|f| = f^+ + f^-$

$f = f^+ - f^-$



$f = f^+ - f^-$

Dowód: Niech $f = \sum_{j=1}^{m} y_j \mathbb{1}_{A_j}$, $g = \sum_{k=1}^{n} z_k \mathbb{1}_{B_k}$

(i) $\lambda f = \sum_{j=1}^{m} \lambda y_j \mathbb{1}_{A_j} \in \mathcal{E}(\mathcal{F})$

(ii) $f + g = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} (y_j + z_k) \mathbb{1}_{\underbrace{A_j \cap B_k}} \in \mathcal{E}(\mathcal{F})$

(iii) $f \cdot g = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} (y_j \cdot z_k) \mathbb{1}_{A_j \cap B_k}^{\in \mathcal{F}} \in \mathcal{E}(\mathcal{F})$

(iv) $f^+ = \sum_{j:\, y_j \geq 0} y_j \mathbb{1}_{A_j} \in \mathcal{E}(\mathcal{F})$

$f^- = \sum_{j:\, y_j \leq 0} y_j \mathbb{1}_{A_j} \in \mathcal{E}(\mathcal{F})$

$|f| = \underset{\in \mathcal{E}(\mathcal{F})}{f^+} + \underset{\in \mathcal{E}(\mathcal{F})}{f^-} \in \mathcal{E}(\mathcal{F})$ z (ii)

$|f| = \sum_{j=1}^{m} |y_j| \mathbb{1}_{A_j} \in \mathcal{E}(\mathcal{F})$ $\boxtimes$

$$|f| = \sum_{j=1}^{n} |y_i| \mathbb{1}_{A_j} \in \mathcal{E}(F)$$

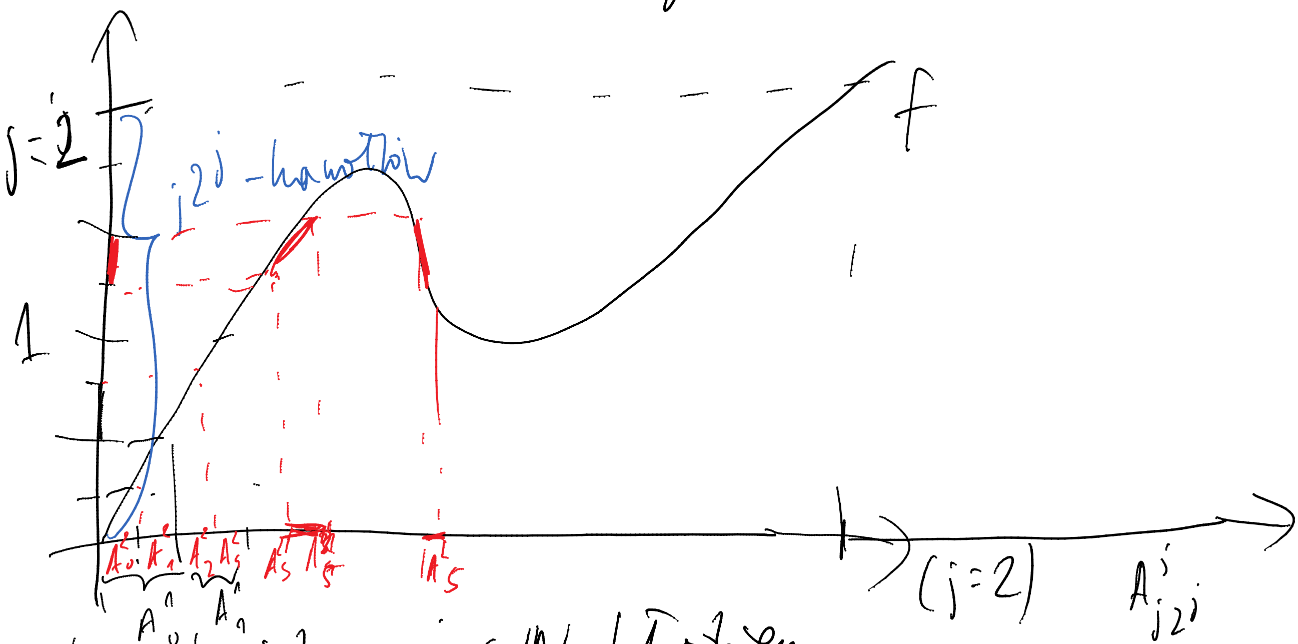
Tw Każda funkcja mierzalna $f: X \to \mathbb{R}$ jest granicą punktową ciągu funkcji prostych $\{f_j\}_{j=1}^{\infty} \in \mathcal{E}(F)$

$$\forall_{x \in X} \quad f(x) = \lim_{j \to \infty} f_j(x)$$

gdzie $|f_j| \leq |f|$.

Jeśli $f \geq 0$, to $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ można wybrać tak, aby $f_1 \leq f_2 \leq f_3 \leq \dots$ czyli $f_j \nearrow f$ $\left(\text{wtedy } f = \sup_{j \in \mathbb{N}} f_j\right)$

Dowód: (Krok 1) Załóżmy, że $f \geq 0$.



Dla każdego $j \in \mathbb{N}$ kładziemy

$$A_k^j := f^{-1}\left(\left[\frac{k}{2^j}, \frac{k+1}{2^j}\right)\right) \in F \quad \text{dla } k = 0, \dots, j2^j - 1$$

$$A^j := f^{-1}([j, +\infty)) \in F$$

$$A^j_{k} = f^{-1}\left(\left[\tfrac{k}{2^j}, +\infty\right)\right) \in \mathcal{F}$$

Zdefiniujmy

$$f_j(x) = \sum_{k=0}^{j2^j} \frac{k}{2^j} \mathbb{1}_{A^j_k}$$

Wtedy $f_j \in \mathcal{E}(\mathcal{F})$ oraz

$$| f_j(x) - f(x)| \leq \frac{1}{2^j} \quad \text{dla } x \in f^{-1}([0,j))$$

Ponadto,

$$f_1 \leq f_2 \leq f_3 \leq f_4 \leq \ldots\ldots \leq f$$

oraz $f_j \nearrow f$.

(Krok 2) Jeśli $f: X \to \mathbb{R}$ dow. mierzalna, to $f = f^+ - f^-$ oraz f^+ i f^- też mierzalne

$$\forall_{a\in\mathbb{R}} \quad (f^+)^{-1}([a,+\infty)) = \begin{cases} f^{-1}([a,+\infty)) \in \mathcal{F}, & a>0 \\ X \in \mathcal{F}, & a \leq 0 \end{cases}$$

$$(f^-)^{-1}([a,+\infty)) = \begin{cases} f^{-1}((-\infty,-a]) \in \mathcal{F}, & a>0 \\ X \in \mathcal{F}, & a \leq 0 \end{cases}$$

Na mocy (kroku 1) istnieją $\{f_j^+\}_{j=1}^{\infty}, \{f_j^-\}_{j=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{E}(\mathcal{F})$

$f_j^+ \nearrow f^+$ $\quad f_j^- \nearrow f^-$. Zatem kładąc

$f_j := f_j^+ - f_j^-$ mamy $\{f_j\}_{j=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{E}(\mathcal{F})$ oraz

$$\forall_{x \in X} \; f_j(x) \longrightarrow f^+(x) - f^-(x) = f(x)$$

$$|f_j| = f_j^+ + f_j^- \leq f^+ + f^- = |f|. \;\blacksquare$$

Def: (Rozszerzona prosta rzeczywista)

Zbiór $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty] = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ wyposażamy w działania:

$$\left.\begin{cases} \forall_{x \in \mathbb{R}} \; x + (\pm\infty) = \pm\infty + x = \pm\infty \\ +\infty + (+\infty) = +\infty \qquad -\infty + (-\infty) = -\infty \end{cases}\right\} \text{dodawanie}$$

$$\forall_{x > 0} \; (\pm x)(+\infty) = \pm\infty$$
$$(\pm x)(-\infty) = \mp\infty$$

$$\boxed{0 \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot 0 = 0}$$

Również będziemy pisać $\frac{1}{\pm\infty} = 0$

$\boxed{\text{Niedozwolone operacje}}$

$+\infty$

Niedozwolone operacje

$\infty - \infty$ oraz $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ nie mają sensu

Def: Funkcję $f: X \to \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ nazywamy mierzalną jeżeli

$$\forall_{a \in \mathbb{R}} \quad f^{-1}([a, +\infty]) \in \mathcal{F}.$$