# $\boxed{\text{CAŁKI Z FUNKCJI NIEUJEMNYCH}}$

$(X, \mathcal{F})$ – ustalona prz. mierzalna

**Tw.** Jeżeli $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ funkcje mierzalne wtedy

$$\inf_{j\in\mathbb{N}} f_j, \quad \sup_{j\in\mathbb{N}} f_j, \quad \liminf_{j\to\infty} f_j, \quad \limsup_{j\to\infty} f_j$$

są mierzalne. W szczególności jeśli $\lim_{j\to\infty} f_j$ istnieje, to jest to funkcja mierzalna.

Przypomnijmy, że

$$\liminf_{j\to\infty} f_j(x) = \lim_{k\to\infty} \inf_{j\geq k} f_j(x) = \sup_{k\in\mathbb{N}} \inf_{j\geq k} f_j(x) \quad \text{granica dolna}$$

$$\limsup_{j\to\infty} f_j(x) = \lim_{k\to\infty} \sup_{j\geq k} f_j(x) = \inf_{k\in\mathbb{N}} \sup_{j\geq k} f_j(x) \quad \text{granica górna}$$

$$\lim_{j\to\infty} f_j(x) \text{ istnieje} \iff \liminf_{j\to\infty} f_j(x) = \limsup_{j\to\infty} f_j(x)$$

i wtedy $\lim_{j\to\infty} f_j(x) = \liminf_{j\to\infty} f_j(x) = \limsup_{j\to\infty} f_j(x)$

Dowód: Wystarczy wykazać mierzalność inf i sup

Dla dow. $a \in \mathbb{R}$

$$\left(\sup_{j\in\mathbb{N}} f_j\right)^{-1}([a, +\infty]) = \{x \in X : \sup_{j\in\mathbb{N}} f_j(x) \geq a\}$$

$$= \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \underbrace{\bigcup_{j\in\mathbb{N}} \underbrace{\{x\in X : f_j(x) \geq a - \tfrac{1}{k}\}}_{\in\mathcal{F}}}_{\in\mathcal{F}} \in \mathcal{F}$$

Zatem $\sup_{j\in\mathbb{N}} f_j : X \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ jest funkcją mierzalną

Stąd

$$\inf_{j\in\mathbb{N}} f_j = \underbrace{-\sup_{j\in\mathbb{N}} \underbrace{\{-f_j\}}_{\text{mierzalna}}}_{\text{mierzalne}}$$ też jest funkcją mierzalną

Reszta też wynika z $\{\cancel{X}\}$

Oznaczenie: $\mathcal{M}(\mathcal{F})$ – zb. funkcji $\mathcal{F}$-mierzalnych $f: X \to \mathbb{R}$

WN. (Własności funkcji mierzalnych) Niech $f, g \in \mathcal{M}(\mathcal{F})$ oraz $\lambda\in\mathbb{R}$. Wtedy

(i) $\lambda f \in \mathcal{M}(\mathcal{F})$

(ii) $f+g \in \mathcal{M}(\mathcal{F})$

(iii) $f\cdot g \in \mathcal{M}(\mathcal{F})$

(iv) $f^+, f^-, |f| \in M(\mathcal{F})$

(v) $f \vee g \in M(\mathcal{F})$, $f \wedge g \in M(\mathcal{F})$

Dowód: Na mocy Tw. z poprzedniego wykładu istnieją $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}, \{g_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{E}(\mathcal{F})$ t. że

$f(x) = \lim_{j \to \infty} f_j(x)$ i $g(x) = \lim_{j \to \infty} g_j(x)$.

(i) $\{\lambda f_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{E}(\mathcal{F})$ i $\lambda f_n \to \lambda f$ jest mierzalna jako granica ciągu funkcji mierzalnych

$\mathcal{E}(\mathcal{F}) \subseteq M(\mathcal{F})$

(ii) $f + g = \lim_{n \to \infty} \underbrace{f_n + g_n}_{\in \mathcal{E}(\mathcal{F}) \subseteq M(\mathcal{F})} \in M(\mathcal{F})$

(iii) i (iv) ANALOGICZNIE $\blacksquare$

(v) $(f \vee g)(x) = \max\{f(x), g(x)\}$

$(f \wedge g)(x) = \min\{f(x), g(x)\}$

(v) wynika z (i), (ii) i (iv), bo

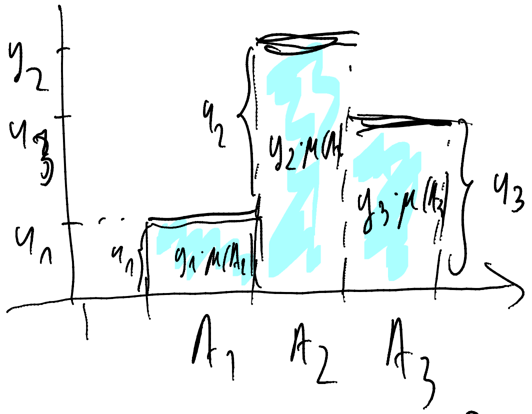
$$f \vee g = \frac{1}{2}\left(f + g + |f - g|\right) \in M(\mathcal{F})$$

$$f \wedge g = \frac{1}{2}\left(f + g - |f - g|\right) \in M(\mathcal{F}) \quad \blacksquare$$

# CAŁKOWANIE FUNKCJI NIEUJEMNYCH.

Zauważmy, że

$$f \in \mathcal{E}(\mathcal{F});\ f \geq 0 \iff \exists_{\substack{A_1,\dots,A_n \in \mathcal{F} \\ \text{parami rozłączne}}} \ \exists_{y_1,\dots,y_n \geq 0} \ f = \sum_{j=1}^{n} y_j \mathbb{1}_{A_j}$$




$(X, \mathcal{F}, \mu)$ – pr. z miarą

**Def:** Jeżeli $f = \sum_{j=1}^{n} y_j \mathbb{1}_{A_j}$ jest (nieujemną) funkcją prostą, to całką z $f$ na $X$ według $\mu$ nazywamy liczbę

$$\boxed{\int_X f \, d\mu := \sum_{j=1}^{n} y_j \mu(A_j)}$$

**STW.** Powyżej określona liczba jest poprawnie określona (tzn. nie zależy od wyboru postaci $f$)

**Dowód:**

**STW** Niech $f, g \in \mathcal{E}(\mathcal{F})$, wtedy

(i) $\forall_{A \in \mathcal{F}} \int_X \mathbb{1}_A \, d\mu = \mu(A)$

$A \in \mathcal{F}$ $X$

(ii) $\forall_{\lambda} \int_X \lambda f \, d\mu = \lambda \int_X f \, d\mu$

(iii) $\int_X f+g \, d\mu = \int_X f \, d\mu + \int_X g \, d\mu$ $\Bigg\}$ liniowość całki

(iv) $f \le g \Rightarrow \int_X f \, d\mu \le \int_X g \, d\mu$ (monotoniczność całki)

Dowód: (i) jasne ☺

(ii) Niech $f = \sum_{j=1}^{n} y_j \mathbb{1}_{A_j}$. Wtedy $\lambda f = \sum_{j=1}^{n} \lambda y_j \mathbb{1}_{A_j}$ i

$$\int_X \lambda f \, d\mu \overset{\text{def.}}{=} \sum_{j=1}^{n} \lambda y_j \mu(A_j) = \lambda \cdot \sum_{j=1}^{n} y_j \mu(A_j) \overset{\text{def}}{=} \lambda \cdot \int_X f \, d\mu$$

(iii) Niech $g = \sum_{i=1}^{m} z_i \mathbb{1}_{B_i}$. Wtedy

$$f+g = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} y_j + z_i \mathbb{1}_{A_j \cap B_i} \text{ i stąd}$$

$$\int_X f+g \, d\mu \overset{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (y_j + z_i) \mu(A_j \cap B_i) =$$

Możemy założyć, że zbiory $A_j$ parami rozłączne oraz $B_i$ parami rozłączne

$$= \sum_{j=1}^{n} y_j \sum_{i=1}^{m} \mu(A_j \cap B_i) +$$

$$\sum^{m} \ldots \sum^{m} (A_j \ldots B_i)$$

$$+\sum_{i=1}^{m} z_i \sum_{j=1}^{m} \mu(A_j \cap B_i)$$

addytywność

$$\overset{\text{mamy}}{=} \sum_{j=1}^{n} y_j\, \mu(A_j) + \sum_{i=1}^{m} z_i\, \mu(B_i)$$

$B_i$ parami rozłączne oraz $X = \bigcup_j A_j$, $X = \bigcup_i B_i$

$$\mu(A_j) = \sum_{i=1}^{m} \mu(A_j \cap B_i)$$
$$\mu(B_i) = \sum_{j=1}^{n} \mu(A_j \cap B_i)$$

$$\overset{\text{def}}{=} \int_X f\, d\mu + \int_X g\, d\mu.$$

(iv) $f \leq g \Rightarrow g = f + \underbrace{(g-f)}_{\in \mathcal{E}(\mathcal{F})}^{\geq 0} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int_X g\, d\mu \overset{\text{(iii)}}{=} \int_X f\, d\mu + \underbrace{\int_X \underbrace{g-f}_{\geq 0}\, d\mu}_{\geq 0} \geq \int_X f\, d\mu \quad \square$$

Uwaga: Jeśli $f \in \mathcal{M}(\mathcal{F})$ dowolna nieujemna funkcja mierzalna, to

$$f = \sup_{j \in \mathbb{N}} f_j \quad \text{gdzie } f_j \text{ funkcje proste t. że } f_j \nearrow f$$

Def: Całką z funkcji mierzalnej $f \in \mathcal{M}(\mathcal{F})$, $f \geq 0$, na $X$ według $\mu$ nazywamy liczbę na $X$ według $\mu$ nazywamy liczbę

$$\boxed{\int_X f\,d\mu := \sup\left\{\int_X h\,d\mu : h \le f \text{ i } h \in \mathcal{E}(\mathcal{F})\right\}}$$

Uwaga: Zauważ, że powyższa definicja jest zgodna z poprzednią definicją, tzn. jeśli $f \in \mathcal{E}(\mathcal{F})$, to wzory $\boxed{\phantom{xx}}$ i $\boxed{\phantom{xx}}$ dają to samo na mocy monotoniczności całki.

<u>Lem.</u> $f, g \in \mathcal{M}(\mathcal{F})$, $0 \le f \le g \Rightarrow \int_X f\,d\mu \le \int_X g\,d\mu$

Dowód:

$$\int_X f\,d\mu \overset{\text{def}}{=} \sup\left\{\int h\,d\mu : h \le f,\ h \in \mathcal{E}(\mathcal{F})\right\} \le$$

$$\le \sup\left\{\int h\,d\mu : h \le g,\ h \in \mathcal{E}(\mathcal{F})\right\} \overset{\text{def}}{=} \int_X g\,d\mu. \quad \blacksquare$$

$f \le g$

$h \le f \Rightarrow h \le g$

<u>Tw.</u> (Beppo Leviego – Twierdzenie zbieżności monotonicznej)

$$\left(\begin{array}{l} \{f_j\}_{j=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{M}(\mathcal{F}) \\ f_j \nearrow f \end{array}\right) \Longrightarrow \int f\,d\mu = \lim_{j\to\infty} \int f_j\,d\mu$$

Dowód: $0 \le f_1 \le f_2 \le f_3 \le \ldots \le f$ i $\lim_{j\to\infty} f_j(x) = f(x)$.

Na mocy lematu (monotoniczności całki) mamy

$$\lim_{j\to\infty} \int f_j \, d\mu = \sup_{j\in\mathbb{N}} \int f_j \, d\mu \in [0, +\infty]$$

Ponadto

$$\forall_j \int_X f_j \, d\mu \leq \int_X f \, d\mu \quad \left( \text{bo } f_j \leq f \right)$$

Czyli $\lim\limits_{j\to\infty} \int f_j \, d\mu \leq \int_X f \, d\mu$.

Aby wykazać nierówność w drugą stronę weźmy $h \in \mathcal{E}(\mathcal{F})$ takie, że $0 \leq h \leq f$. Potrzebujemy pokazać, że

$$\int_X h \, d\mu \leq \sup \int_X f_j \, d\mu = \lim_{j\to\infty} \int_X f_j \, d\mu$$

Weźmy $\alpha \in (0,1)$. Skoro $f = \lim\limits_{j\to\infty} f_j(x)$, to

$$\forall_{x\in X} \; \exists_{j\in\mathbb{N}} \quad \alpha f(x) \leq f_j(x)$$

Zatem suma zbiorów

$$B_j = \{x \in X : \alpha f(x) \leq f_j(x)\} \quad j\in\mathbb{N}$$

daje całą przestrzeń $X$. Zauważmy, że $\{B_j\}_{j=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{F}$ tworzą ciąg wstępujący, tzn.

$$B_1 \subseteq B_2 \subseteq B_3 \subseteq \ldots \ldots \quad (\text{bo } f_1 \leq f_2 \leq f_3 \leq \ldots)$$

$h \leq f$ z def. $B_j$

Ponadto

$$\alpha h \mathbb{1}_{B_j} \overset{h\le f}{\le} \alpha f \mathbb{1}_{B_j} \overset{z\ \mathrm{def.}\ B_j}{\le} f_j \mathbb{1}_{B_j} \le f_j$$

Stąd

$$\boxed{\int_X \alpha h \mathbb{1}_{B_j}\, d\mu} \le \int_X f_j\, d\mu \qquad (\dagger)$$

$$\int_X \alpha h \mathbb{1}_{B_j}\, d\mu = \alpha \int_{B_j} h\, d\mu \to \int_X h\, d\mu$$

Jeśli $h = \sum_{k=1}^n y_k \mathbb{1}_{A_k}$, to na mocy ciągłości miary

$$\lim_{j\to\infty} \mu(A_k \cap B_j) \underset{B_1 \subseteq B_2 \subseteq \dots}{=\!=} \mu\left(A_k \cap \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\right) \overset{\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j = X}{=\!=} \mu(A_k)$$

Zatem

$$\int \alpha h \mathbb{1}_{B_j} = \alpha \int_X \sum_{k=1}^n y_k \mathbb{1}_{A_k \cap B_j}\, d\mu = \alpha \sum_{k=1}^n y_k \mu(A_k \cap B_j)$$

$$\xrightarrow[j\to\infty]{} \alpha \sum_{k=1}^n y_k \mu(A_k) = \alpha \int_X h\, d\mu$$

Czyli

$$\alpha \int_X h\, d\mu = \lim_{j\to\infty} \int \alpha h \mathbb{1}_{B_j}\, d\mu \overset{(\dagger)}{\le} \lim_{j\to\infty} \int f_j\, d\mu$$

przechodząc z $\alpha \to 1$ mamy

$$\int h\, d\mu \le \lim \int f_j\, d\mu$$

$j \to \infty$

Stąd

$$\int_X f \, d\mu \overset{\text{def.}}{=} \sup \left\{ \int_X h \, d\mu \ : \ 0 \leq h \leq f \right\} \leq \lim_{j \to \infty} \int f_j \, d\mu$$

$\blacksquare$