Teoria miary i całki

Zagadnienia na egzamin 13.02.2023

1. σ-algebry zbiorów: definicja, własności, przykłady, σ-algebry generowane przez rodziny zbiorów, σ-algebra zbiorów borelowskich na $\mathbb{R}^n$ - różne rodzaje generatorów.

2. Miary: własności, ciągłość miary vs σ-addytywność, przykłady miar.

3. Jednoznaczność miary: układ Dynkina i twierdzenie Dynkina, twierdzenie o jednoznaczności miary.

4. Wnioski z Twierdzenia o jednoznaczności: jednoznaczność miary Lebesgue'a, miary niezmienniczość ze względu na przesunięcia na $\mathbb{R}^n$.

5. Twierdzenie Caratheodoriego o przedłużeniu miary z półpierścienia na σ-algebrę zbiorów: półpierścień, miara zewnętrzna, rozszerzenie z półpierścienia na pierścień, zbiory mierzalne (spełniające warunek Caratheodoriego).

6. Istnienie miary Lebesgue'a (σ-addytywność objętości).

7. Odwzorowania mierzalne: charakteryzacje, własności, przykłady.

8. Obraz miary przy odwzorowaniu mierzalnym: definicja, przykłady, obraz miary Lebesgue'a przy odwracalnych odwzorowaniach liniowych.

9. Rzeczywiste funkcje mierzalne i funkcje proste: definicje, przykłady, własności, aproksymacja funkcji mierzalnych funkcjami prostymi.

10. Definicja i własności całki: wzór dla funkcji prostych, funkcji nieujemnych i definicja ogólna. Własności całki i przykłady.

11. Twierdzenie Radona-Nikodyma: miary absolutnie ciągłe, przykłady.

12. Twierdzenia o przechodzeniu z granicą pod całkę: twierdzenie Leviego, twierdzenie Lebesgue'a i lemat Fatou, przykłady.

13. Porównanie całki Riemanna i całki Lebesgue'a: charakteryzacja całkowalności w sensie Riemanna, przykład funkcji Dirichleta.

14. Miary produktowe: konstrukcja i istnienie miary produktowej, twierdzenie Fubiniego, twierdzenie Tonellego.

Minimalne wymagania na ocenę dostateczną:

Znajomość definicji: σ-algebry, σ-algebry generowanej przez rodzinę zbiorów, σ-algebry zbiorów borelowskich, miary, miary Lebesgue'a (n-wymiarowej objętości), miary produktowej, funkcji mierzalnej, funkcji prostej, konstrukcja całki w sensie Lebesgue'a, związek między całką Lebesgue'a i Riemanna.

Znajomość własności: miary (ciągłość, monotniczność, itp.), miary Lebesgue'a (n-wymiarowej objętości) (niezmienniczość ze względu na przesunięcia itp.), całki (liniowość, monotoniczność itp.)

Znajomość twierdzeń: Twierdzenie o istnieniu miary Lebesgue'a (n-wymiarowej objętości), Twierdzenie Radona-Nikodyma, Twierdzenie Leviego (o zbieżności monotonicznej), Twierdzenie Lebesgue'a (o zbieżności zmajoryzowanej)

Minimalne wymagania na ocenę dobrą:

Znajomość definicji: σ-algebry, pierścienia, półpierścienia, itp. a także tychże struktur generowanych przez rodzinę zbiorów, σ-algebry zbiorów borelowskich, miary, przykłady miar, miara Lebesgue'a (n-wymiarowej objętości), miara liczącej; miara zewnętrznej, miara produktowej, funkcja mierzalna, funkcji prosta, konstrukcja całki w sensie Lebesgue'a, związek między całką Lebesgue'a i Riemanna.

Znajomość własności: zbiorów borelowskich (różne rodzaje generatorów), miary (ciągłość, monotniczność, itp.), miary Lebesgue'a (n-wymiarowej objętości) (niezmienniczość ze względu na przesunięcia itp.), funkcji mierzalnych (aproksymacja funkjami prostymi, zamkniętość na granice punktowe, operacje liniowe itp), całki (liniowość, monotoniczność itp.)

Znajomość twierdzeń: Twierdzenia o Jednoznaczności miary, Twierdzenie Caratheodoriego o przedłużeniu miary z półpierścienia na σ-algebrę zbiorów, o istnieniu miary Lebesgue'a (n-wymiarowej objętości), o charakteryzacji miar na $\mathbb{R}^n$ niezmienniczych ze względu na przesunięcia, Twierdzenie Radona-Nikodyma, Twierdzenie o aproksymacji funkcji mierzalnych funkcjami prostymi, Twierdzenie Leviego (o zbieżności monotonicznej), Twierdzenie Lebesgue'a (o zbieżności zmajoryzowanej) i lemat Fatou, Twierdzenia Fubiniego i Tonellego.

Wymagania na ocenę bardzo dobrą:

To co powyżej plus: dowód istnienia σ-algebry (itp) generowanej przez dowolną rodzinę zbiorów, dowód twierdzenia, że zbiory borelowskie na $\mathbb{R}^n$, są generowane przez prostopadłościany, dowód własności miary (w tym ciągłości miary), kroki w dowodzie Twierdzenia Caratheodoriego, dowód twierdzniea o istnieniu miary Lebesgue'a (n-wymiarowej objętości), dowód własności funkcji mierzalnych (aproksymacja funkcjami prostymi, zamkniętość na granice punktowe, operacje liniowe itp), dowód własności całki (liniowość, montoniczność itp.), dowód Twierdzenie Leviego (o zbieżności monotonicznej), dowód Twierdzenia Lebesgue'a (o zbieżności zmajoryzowanej), dowód twierdzenia o istnieniu miary produktowej, dowód Twierdzenia Fubiniego i Twierdzenia Tonellego.