Teoria miary i całki

Zagadnienia na egzamin 08.02.2024

1. σ-algebry zbiorów: definicja, własności, przykłady, σ-algebry generowane przez rodziny zbiorów, σ-algebra zbiorów borelowskich na $\mathbb{R}^n$ - różne rodzaje generatorów.
2. Miary: własności, ciągłość miary vs σ-addytywność, przykłady miar.
3. Jednoznaczność miary: λ-układy, Lemat o λ i π-układach oraz twierdzenie Dynkina o jednoznaczności miary.
4. Wnioski z Twierdzenia o jednoznaczności: jednoznaczność miary Lebesgue'a, miary niezmienniczość ze względu na przesunięcia na $\mathbb{R}^n$.
5. Twierdzenie Caratheodoriego o przedłużeniu miary z półpierścienia na σ-algebrę zbiorów: półpierścień, miara zewnętrzna, rozszerzenie z półpierścienia na pierścień, zbiory mierzalne (spełniające warunek Caratheodoriego).
6. Istnienie miary Lebesgue'a-Stieltjesa (σ-addytywność).
7. Odwzorowania mierzalne: charakteryzacje, własności, przykłady.
8. Obraz miary przy odwzorowaniu mierzalnym: definicja, przykłady, obraz miary Lebesgue'a przy odwracalnych odwzorowaniach liniowych.
9. Rzeczywiste funkcje mierzalne i funkcje proste: definicje, przykłady, własności, aproksymacja funkcji mierzalnych funkcjami prostymi.
10. Definicja i własności całki: wzór dla funkcji prostych, funkcji nieujemnych i definicja ogólna. Własności całki i przykłady.
11. Twierdzenie Radona-Nikodyma: miary absolutnie ciągłe, przykłady.
12. Zamiana zmiennych w całce: Twierdzenie ogólne, wnioski i przykłady (absolutna ciągłość miary Lebesgue'a-Stieltjesa, rozkłady ciągłe w prawdopodobieństwie).
13. Twierdzenia o przechodzeniu z granicą pod całkę: twierdzenie Leviego (o zbieżności monotonicznej) , twierdzenie Lebesgue'a (o zbieżności zmajoryzowanej) i lemat Fatou, przykłady.
14. Miary produktowe i całki iterowane: konstrukcja i istnienie miary produktowej, twierdzenie Tonellego i twierdzenie Fubiniego.

Minimalne wymagania na ocenę dostateczną:

Znajomość definicji: σ-algebry, σ-algebry generowanej przez rodzinę zbiorów, σ-algebry zbiorów borelowskich, miary, miary Lebesgue'a (n-wymiarowej objętości), miary produktowej, funkcji mierzalnej, funkcji prostej, konstrukcja całki w sensie Lebesgue'a, związek między całką Lebesgue'a i Riemanna.

Znajomość własności: miary (ciągłość, monotniczność, itp.), miary Lebesgue'a (n-wymiarowej objętości) (niezmienniczość ze względu na przesunięcia itp.), całki (liniowość, monotoniczność itp.)

Znajomość twierdzeń: Twierdzenie o istnieniu miary Lebesgue'a (n-wymiarowej objętości), Twierdzenie Radona-Nikodyma, Twierdzenie Leviego (o zbieżności monotonicznej), Twierdzenie Lebesgue'a (o zbieżności zmajoryzowanej)

Minimalne wymagania na ocenę dobrą:

Znajomość definicji: σ-algebra, pierścień, półpierścień, itp. a także takich struktur generowanych przez rodzinę zbiorów, σ-algebra zbiorów borelowskich, miara, przykłady miar; miara Lebesgue'a (n-wymiarowa objętość), miara licząca; miara zewnętrzna, miara produktowa, funkcja mierzalna, funkcja prosta, konstrukcja całki w sensie Lebesgue'a, związek między całką Lebesgue'a i Riemanna.

Znajomość własności: zbiorów borelowskich (różne rodzaje generatorów), miary (ciągłość, monotniczność, itp.), miary Lebesgue'a (n-wymiarowej objętości) (niezmienniczość ze względu na przesunięcia itp.), funkcji mierzalnych (aproksymacja funkjami prostymi, zamkniętość na granice punktowe, operacje liniowe itp), całki (liniowość, monotoniczność itp.)

Znajomość twierdzeń: Twierdzenia o Jednoznaczności miary, Twierdzenie o przedłużeniu miary z półpierścienia na σ-algebrę zbiorów, o istnieniu miary Lebesgue'a (n-wymiarowej objętości), o charakteryzacji miar na $\mathbb{R}^n$ niezmienniczych ze względu na przesunięcia, Twierdzenie Radona-Nikodyma, Twierdzenie o aproksymacji funkcji mierzalnych funkcjami prostymi, Twierdzenie Leviego (o zbieżności monotonicznej), Twierdzenie Lebesgue'a (o zbieżności zmajoryzowanej) i lemat Fatou, Twierdzenia Fubiniego i Tonellego.

Wymagania na ocenę bardzo dobrą:

To co powyżej plus: dowód istnienia σ-algebry (itp) generowanej przez dowolną rodzinę zbiorów, dowód twierdzenia, że zbiory borelowskie na $\mathbb{R}^n$, są generowane przez prostopadłościany, dowód własności miary (w tym ciągłości miary), kroki w dowodzie Twierdzenia Caratheodoriego, dowód twierdznia o istnieniu miary Lebesgue'a (n-wymiarowej objętości), dowód własności funkcji mierzalnych (aproksymacja funkcjami prostymi, zamkniętość na granice punktowe, operacje liniowe itp), dowód własności całki (liniowość, montoniczność itp.), dowód Twierdzenie Leviego (o zbieżności monotonicznej), dowód Twierdzenia Lebesgue'a (o zbieżności zmajoryzowanej), dowód twierdzenia o istnieniu miary produktowej, dowód Twierdzenia Fubiniego i Twierdzenia Tonellego.