Analiza funkcjonalna

Zagadnienia na egzamin 29.06.2026

1. Przestrzenie unormowane i przestrzenie Banacha, zupełność domkniętych podprzestrzeni (dowód), uzupełnienie, zbieżność szeregów w przestrzeniach Banacha.
2. Charakteryzacje równoważności norm (dowód), równoważność norm w przestrzeniach skończenie wielowymiarowych (dowód) i wnioski (zupełność przestrzeni skończenie wymiarowych oraz automatyczna ograniczoność operatorów na takich przestrzeniach).
3. Przestrzenie funkcji ciągłych (ograniczonych i znikających w nieskończoności): zupełność, zbieżność jednostajna, przestrzenie ciągów.
4. Przestrzenie L^p, dla $p \in [1, \infty]$: nierówność Höldera (dowód), nierówność Minkowskiego (dowód), zupełność (dowód), przestrzenie ciągów.
5. Operatory ograniczone: definicja i przykłady, ciągłość operatorów (dowód), norma operatora, przestrzeń operatorów ograniczonych (zupełność dowód).
6. Przestrzenie Hilberta: definicja, nierówność Schwartza (dowód), charakteryzacja jako przestrzeni Banacha spełniających tożsamość równoległoboku, przykłady.
7. Rzut ortogonalny: definicja, istnienie i jednoznaczność (dowód), operator rzutowania.
8. Bazy ortonormalne: istnienie i charakteryzacje bazy ortonormalnej (dowód), charakteryzacja przestrzeni Hilberta jako przestrzeni $\ell_2(I)$, ośrodkowe przestrzenie Hilberta, wymiar przestrzeni Hilberta.
9. Operatory sprzężone: Twierdzenie o postaci funkcjonału liniowego i ograniczonego na przestrzeni Hilberta (dowód), istnienie i jednoznaczoniość operatora sprzężonego (dowód), własności sprzężenia (dowód), różne klasy operatorów zdefiniowanych za pomocą sprzężenia.
10. Twierdzenie Hahna-Banacha (dowód): związek między funkcjonałami nad $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$ (dowód), wnioski z Twierdzenie Hahna-Banacha (dowód), pojęcie przestrzeni refleksywnej.
11. Przestrzenie dualne do przestrzeni Banacha: Przestrzeń dualna do przestrzeni L^p, przykłady przestrzeni refleksywnych i nierefleksywnych.
12. Twierdzenie Banacha-Steinhausa (dowód): twierdzenie Baire'a, ograniczoność granicy punktowej operatora ograniczonego (dowód).
13. Twierdzenie o operatorze otwartym (dowód): wnioski (dowód), Twierdzenie o wykresie domkniętym (dowód).
14. Algebry Banacha i elementy odwracalne: definicja i przykłady, Lemat Neumanna (dowód), otwartość zbioru elementów odwracalnych i analityczność operacji odwracania.
15. Widmo i promień spektralny: definicja i przykłady, podstawowe własności, wzór na promień spektralny.

Przebieg egzaminu

Osoba egzaminowana losuje dwa zagadnienia, na bazie których przebiega dyskusja/odpytywanie. W razie potrzeby osoba egzaminowana może najpierw odpowiedź przemyśleć (maksymalnie do 15 minut). W razie potrzeby kartkę i długopis dostarcza osoba egzaminująca.

Minimalne wymagania na ocenę pozytywną:

Znajomość definicji oraz przykładów następujących pojęć: norma, przestrzeń Banacha, przestrzeń funkcji ciągłych na zbiorze zwartym, przestrzeń $L^p[0,1]$ oraz ℓ^p dla $p \in [1,\infty)$, iloczyn skalarny, przestrzeń Hilberta, ortogonalność wektorów, rzut ortogonalny wektora na podprzestrzeń, operator ograniczony, funkcjonał ograniczony, norma operatorowa, przestrzeń operatorów ograniczonych, przestrzeń dualna.

Znajomość twierdzeń: o zupełności domkniętych podprzestrzeni w przestrzeniach Banacha, równoważność ograniczoności i ciągłości dla operatorów liniowych, automatyczna ciągłość operatorów na przestrzeniach skończenie wymiarowych, nierówność Höldera, nierówność Minkowskiego, Twierdzenie Pitagorasa w przestrzeniach Hilberta, Twierdzenie o postaci funkcjonału liniowego i ograniczonego na przestrzeni Hilberta, Twierdzenie Hahna-Banacha, Twierdzenie Banacha-Steinhausa, Twierdzenie o operatorze otwartym.

Wymagania na ocenę dobrą:

Znajomość definicji oraz przykładów następujących pojęć: norma, przestrzeń unormowna, równoważność norm, przestrzeń Banacha, zbieżność szeregów w przestrzeniach Banacha, przestrzenie funkcji ciągłych i ograniczonych lub znikających w nieskończoności, przestrzeń $L^p(\mu)$ dla $p \in [1,\infty]$, liniowy operator ograniczony, norma operatorowa, iloczyn skalarny, przestrzeń Hilberta, baza ortonormalna, rzut ortogonalny wektora na podprzestrzeń, operator sprzężony, operator unitarny, operator rzutu ortogonalnego, przestrzeń operatorów ograniczonych, przestrzeń dualna, przestrzeń refleksywna, algebra Banacha, widmo elementu w algebrze Banacha.

Znajomość twierdzeń i umiejętność zastowania ich do przykładów: charakteryzacje równoważności norm, zupełność domkniętych podprzestrzeni w przestrzeniach Banacha, istnienie uzupełnienia przestrzeni unormowanej, równoważność ograniczoności i ciągłości dla operatorów liniowych, automatyczna równoważność norm oraz ciągłość operatorów w przestrzeniach skończenie wymiarowych, nierówność Holdera, nierówność Minkowskiego, nierówność Schwartza w przestrzeniach Hilberta, charakteryzacja przestrzeni Hilberta przez tożsamość równoległoboku i wzory polaryzacyjne, Twierdzenie o istenieniu i charakteryzacje bazy ortonormalnej, Twierdzenie o postaci funkcjonału liniowego i ograniczonego na przestrzeni Hilberta, Twierdzenie o istnieniu operatora sprzężonego, własności sprzężenia, Twierdzenie o istnieniu i jednoznaczności rzutu ortogonalnego, postać przestrzeni dualnej do $L^p(\mu)$ dla dla $p \in [1,\infty)$, Twierdzenie Hahna-Banacha (i wnioski), Twierdzenie Banacha-Steinhausa (i wnioski), Twierdzenie o operatorze otwartym (i wnioski), Twierdzenie o wykresie domkniętym, Lemat Neumanna, własności zbioru elementów odwracalnych w algebrach Banacha, własności widma.

Na ocenę dobrą z plusem wymagane są elementy dowodowe.

Wymagania na ocenę bardzo dobrą: Wszystkie zagadnienia plus dowody.

W przypadku spełnienia wymagań minimalnych na ocenę pozytywną, elementy dowodów lub dowody mogą podnieść ocenę o połowę lub o cały stopień. Ocena może być podwyższona o pół stopnia za aktywność na wykładzie.