

θβlicZe 2017

Koło Naukowe Matematyków UAM
oraz
Koło Matematyki i Informatyki Stosowanej UAM

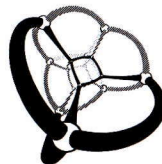
Wydawca: Koło Naukowe Matematyków UAM
Kontakt: konferencjaoblicze@gmail.com
Skład tekstu: Jędrzej Garnek
Korekta: Aleksandra Kaim i Jędrzej Garnek
Druk: Wieland Drukarnia Cyfrowa

Odpowiedzialność za treść tekstów ponoszą ich autorzy.
ISBN: 978-83-946301-1-9

Projekt Potęga matematyki realizowany
dzięki środkom finansowym
otrzymanym od Miasta Poznań.

POZnań*

Wykonawca projektu:
Poznańska Fundacja Matematyczna



<http://oblicze.wmi.amu.edu.pl>

Poznań, wrzesień 2017

Spis treści

Wstęp	5
1 Krzysztof Bardadyn <i>Twierdzenie Coburn'a</i>	17
2 Marcin Choiński <i>Model krzyżowy gruźlicy dla subpopulacji osób bezdolnych i niebezdolnych – wstępna analiza</i>	27
3 Magdalena Figiel, Anna Futa <i>Wyznacznik Hankela dla klasy funkcji typowo rzeczywistych związanych z wielomianami Gegenbauera</i>	39
4 Arnold Kowalski <i>Powierzchnie minimalne</i>	49
5 Maciej Kowalski <i>Problem samotnego biegacza</i>	61
6 Jacek Krajczok <i>Miara Haara</i>	71
7 Mateusz Krukowski <i>Światy bez odległości, czyli o przestrzeniach jed- nostajnych</i>	81
8 Robert Kwieciński <i>Podgrupy w grupach skończonych</i>	93
9 Paulina Mołęda, Mariusz Swornóg <i>O liniowych stałych Harbourne'a i rzutowych konfiguracjach \mathbb{K}-prostych</i>	105



POZnan*

Twierdzenie Coburn'a

Krzysztof Bardadyn

Uniwersytet w Białymstoku

1.1 Wstęp

Jak powszechnie wiadomo, w przestrzeniach skończonego wymiaru każda liniowa izometria jest odwzorowaniem odwracalnym. Sprawa wygląda inaczej, gdy rozważamy przestrzeń nieskończonego wymiaru. Istnieją w nich bowiem izometrie niebędące surjekcjami. Taką sytuację dobrze ilustruje następujący, klasyczny już, przykład. Rozważmy przestrzeń Hilberta $\ell^2(\mathbb{N})$ ciągów sumowalnych z kwadratem oraz operator $T \in B(\ell^2(\mathbb{N}))$ dany wzorem

$$T(x_1, x_2, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots).$$

Jest to tak zwany *operator jednostronnego przesunięcia*. Z powyższego wzoru widać, że T jest nieodwracalną izometrią. Co więcej, z operatorem tym związany jest kolejny klasyczny obiekt teorii operatorów. Przypomnijmy, iż C^* -algebrą operatorów działających na pewnej przestrzeni Hilberta \mathcal{H} nazywamy podalgebrę algebry operatorów ograniczonych $B(\mathcal{H})$ domkniętą w normie operatorowej i zamkniętą ze względu na operację sprzężenia.

Definicja 1.1. C^* -algebrę $C^*(T)$ generowaną przez operator przesunięcia T , tj. najmniejszą domkniętą w normie operatorowej samosprzężoną podalgebrę algebry $B(\mathcal{H})$ zawierającą T , nazywamy **algebrą Toeplitza**.

Okazuje się, że algebra Toeplitza posiada pewną uniwersalną własność: każda niedowracalna izometria generuje kopię tej algebry. Zachodzi mianowicie następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1.2 (Twierdzenie Coburn'a). *Niech S będzie dowolną nieodwracalną izometrią na pewnej przestrzeni Hilberta \mathcal{H} . Wówczas przyporządkowanie*

$$S \mapsto T$$

przedłuża się jednoznacznie do izometrycznego $$ -izomorfizmu C^* -algebry $C^*(S)$ generowanej przez S na algebrę Toeplitza $C^*(T)$.*

Uwaga 1.3. *Powyższe twierdzenie nie zachodzi jeżeli pominiemy założenie o nieodwracalności izometrii S . Istotnie z twierdzenia spektralnego wynika, że C^* -algebra generowana przez operator unitarny (odwracalną izometrię) jest izomorficzna z algebrą funkcji ciągłych na spektrum tej tego operatora. Ponadto dla dowolnego domkniętego podzbioru okręgu jednostkowego można znaleźć operator unitarny, którego spektrum będzie tym zbiorem. Na mocy twierdzenia Stone'a-Banacha C^* -algebry generowane przez operatory unitarne są izomorficzne wtedy i tylko wtedy, gdy ich widma są homeomorficzne. Widzimy więc, że istnieje nieprzeliczalna mnogość wzajemnie nieizomorficznych C^* -algebr generowanych przez odwracalne izometrie.*

Klasyczny dowód twierdzenia Coburn'a, patrz [1], lub [4, Twierdzenie 3.5.18], opiera się na rozkładzie Wolda-von Neumanna izometrii S , który pozwala traktować S jako sumę prostą pewnej ilości operatorów przesunięcia oraz (ewentualnie) operatora unitarnego, patrz [4, Twierdzenie 3.5.17]. Celem niniejszego artykułu jest przedstawienie alternatywnego, niezależnego i kompletnego dowodu twierdzenia Coburn'a opierającego się na bezpośredniej analizie algebry $C^*(S)$ i fackie istnienia C^* -algebry uniwersalnej. Schemat przedstawionego dowodu został zainspirowany rozumowaniami pojawiającymi się przy w dowodach twierdzeń o jednoznaczności dla algebr Cuntz'a [2], Cuntz'a-Krieger'a [3], czy ogólniej algebr grafowych [5]. W rzeczywistości, algebra Toeplitza jest szczególnym przypadkiem algebry Cuntz'a-Krieger'a i niniejsza praca może być traktowana jako wstęp i

zachęta do dalszych studiów nad wyżej wymienionymi algebra-
mi.

1.2 Dowód Twierdzenia Coburn'a

Niech S będzie nieodwracalną izometrią na przestrzeni Hilberta \mathcal{H} . Założenia te przekładają się na następujące algebraiczne własności:

$$S^*S = 1, \quad SS^* \neq 1. \quad (1.1)$$

Rzeczywiście, izometria S zachowuje iloczyn skalarny, a zatem dla dowolnych $x, y \in \mathcal{H}$ mamy:

$$\langle x, y \rangle = \langle Sx, Sy \rangle = \langle x, S^*Sy \rangle,$$

wobec czego $S^*S = 1$. Ponadto:

$$(SS^*)^2 = (SS^*)^* = SS^*.$$

Wynika stąd, że SS^* jest rzutem ortogonalnym na obraz S . Gdyby rzut SS^* był operatorem identycznościowym 1, to obraz S musiałby być równy całej przestrzeni \mathcal{H} , co nie jest prawdą wobec nieodwracalności S .

Korzystając z relacji (1.1) otrzymujemy następujący opis algebry $C^*(S)$.

Lemat 1.4. *Algebra $C^*(S)$ jest domknięciem otoczki liniowej operatorów postaci $S^n S^{*m}$, $n, m \in \mathbb{N}$:*

$$C^*(S) = \overline{\text{span}}\{S^n S^{*m} : n, m \in \mathbb{N}\}.$$

Dowód. Z definicji, prawa strona równości jest zawarta w $C^*(S)$. Wobec tego wystarczy pokazać, że $\overline{\text{span}}\{S^n S^{*m} : n, m \in \mathbb{N}\}$ jest C^* -algebrą. Zauważmy jednak, że przestrzeń ta jest zamknięta na operację sprzężenia, gdyż:

$$(S^n S^{*m})^* = S^m S^{*n}, \quad \text{dla } n, m \in \mathbb{N}.$$

Jest ona również zamknięta na mnożenie, co wynika z równości:

$$(S^n S^{*m})(S^k S^{*l}) = \begin{cases} S^{n+k-m} S^{*l} & \text{dla } m < k, \\ S^n S^{*(l+m-k)} & \text{dla } m \geq k, \end{cases}$$

która z kolei wynika wprost z relacji $S^{*k} S^k = 1$ i $S^{*m} S^m = 1$, por. (1.1). \square

Z dowodu powyższego stwierdzenia wynika, że zbiór

$$A_S := \overline{\text{span}}\{S^n S^{*n} : n \in \mathbb{N}\} \quad (1.2)$$

jest C^* -podalgebrą algebry $C^*(S)$.

Definicja 1.5. Algebrę A_S zadaną wzorem (1.2) nazywamy **rdzeniem** C^* -algebry $C^*(S)$.

Okazuje się, że analiza rdzenia algebry $C^*(S)$ odgrywa niebagatelną rolę w badaniu jej struktury. Ma ona swoje odpowiedniki w wielu innych algebrach tego typu. Wagę tej podalgebry zilustrujemy na przykładzie dowodu twierdzenia Coburn'a.

Lemat 1.6. *Rdzeń algebry Toeplitza jest w naturalny sposób izomorficzny z algebrą ciągów zbieżnych $c(\mathbb{N})$:*

$$A_S \cong c(\mathbb{N}).$$

Dowód. Przypomnijmy, że $S^n S^{*n}$ jest rzutem na obraz S^n . Wobec tego $\{S^n S^{*n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ jest nierosnącym ciągiem rzutów. De facto, jest on ściśle malejący. Istotnie, załóżmy, że jest inaczej. Wówczas, dla pewnego $m \in \mathbb{N}$ zachodzi

$$S^m S^{*m} = S^{m+1} S^{*(m+1)}.$$

Mnożąc powyższą równość przez S^{*m} z lewej i przez S^m z prawej strony otrzymujemy, że $SS^* = 1$, co jest sprzeczne z (1.1). Zatem kładąc dla każdego $n \in \mathbb{N}$:

$$P_n := S^n S^{*n} - S^{n+1} S^{*(n+1)}, \quad (1.3)$$

otrzymujemy rodzinę $\{P_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ parami ortogonalnych, niezerowych rzutów:

$$P_n P_m = \delta_{n,m} P_n, \quad \text{dla } n, m \in \mathbb{N}.$$

Zauważmy też, że

$$A_S = \overline{\text{span}}\{\{P_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{1\}\},$$

gdź $S^n S^{*n} = 1 - (P_0 + \dots + P_{n-1})$ dla $n > 0$. Twierdzimy, że przekształcenie:

$$\begin{aligned} A_S &\longrightarrow c_0(\mathbb{N}) & (1.4) \\ P_n &\mapsto e_n = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_n, 0, \dots) \\ 1 &\mapsto (1, \dots, 1, 1, 1, \dots) \end{aligned}$$

przedłuża się do izomorfizmu algebr A_S i $c(\mathbb{N})$. Istotnie, nietrudno sprawdzić, że (1.4) zadaje izomorfizm C^* -algebry

$$A_0 := \overline{\text{span}}\{P_n : n \in \mathbb{N}\},$$

na C^* -algebrę $c_0(\mathbb{N})$ ciągów zbieżnych do zera. Skoro A_S jest ujedynkowieniem A_0 , a $c(\mathbb{N})$ jest ujedynkowieniem $c_0(\mathbb{N})$, to nasza teza wynika, ze znanego faktu, patrz [4, Twierdzenie 2.1.6]. \square

W dowodzie twierdzenia Coburn'a równie istotną rolę co rdzeń algebry, pełni rzut na tę algebrę, zwany w teorii C^* -algebr *warunkową wartością oczekiwaną*, zdefiniowany w kolejnym lemacie.

Lemat 1.7. *Odwzorowanie $E_S : C^*(S) \longrightarrow A_S \subseteq C^*(S)$ zdefiniowane wzorem*

$$E_S(a) := \sum_{n=0}^{\infty} P_n a P_n, \quad (1.5)$$

gdzie szereg jest zbieżny w silnej topologii operatorowej, a operatory P_n dane są przez (1.3), stanowi rzut na A_S . Co więcej, dla każdego $a \in C^*(S)$

$$E_S(a^* a) = 0 \implies a = 0.$$

Dowód. Przypomnijmy, iż $\{P_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ są rzutami ortogonalnymi, których obrazy stanowią rozbięcie przestrzeni Hilberta \mathcal{H} na sumę prostą przestrzeni Hilberta. Stąd otrzymujemy natychmiast, że szereg (1.5) jest zbieżny w silnej topologii operatorowej. Niech $a \in C^*(S)$ będzie teraz taki, że $E_S(a^*a) = 0$. Stąd, iż rzuty $\{P_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ są parami ortogonalne wynika, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ mamy $P_n a^* a P_n = 0$. Zatem, korzystając C^* -równości, dla każdego $n \in \mathbb{N}$ mamy $a P_n = 0$. Skoro obrazy rzutów rozpinają przestrzeń \mathcal{H} , to otrzymujemy, że $a = 0$. \square

Odejdziemy teraz na moment od badania algebry $C^*(S)$, aby zdefiniować uniwersalną C^* -algebrę zadaną przez relacje (1.1), która przyda nam się w dalszej części dowodu Twierdzenia Coburn'a. Zaczniemy od przypomnienia abstrakcyjnej definicji C^* -algebry.

Definicja 1.8. C^* -algebrą nazywamy zespoloną algebrę Banacha A wraz z odwzorowaniem $*$: $A \rightarrow A$ o następujących własnościach:

$$(a^*)^* = a, \quad (\alpha a + \beta b)^* = \bar{\alpha} a^* + \bar{\beta} b^*, \quad (ab)^* = b^* a^* \quad (1.6)$$

dla każdego $a, b \in A$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, oraz spełniającą tak zwaną C^* -równość: $\|aa^*\| = \|a\|^2$.

Zauważmy, że każda C^* -algebra operatorów na pewnej przestrzeni Hilberta (zdefiniowana we wstępie) jest C^* -algebrą w sensie Definicji 1.8. Słynne Twierdzenie Gelfanda-Najmarka mówi, że każda abstrakcyjna C^* -algebra jest izomorficzna z C^* -algebrą operatorów. Aby je sformułować wprowadzimy pojęcie reprezentacji.

Definicja 1.9. Niech A będzie C^* -algebrą. Parę (\mathcal{H}, π) nazywamy **reprezentacją** C^* -algebry A jeżeli \mathcal{H} jest przestrzenią Hilberta natomiast $\pi : A \rightarrow B(\mathcal{H})$ jest $*$ -homomorfizmem, tzn. odwzorowaniem liniowym, zachowującym iloczyn i sprzężenie. Jeżeli π jest różnowartościowe to powiemy, że reprezentacja jest **wierna**. Czasami reprezentacją będziemy nazywać samo odwzorowanie π .

Przypomnijmy, że każda wierna reprezentacja C^* -algebry jest automatycznie izometrią, patrz [4, Twierdzenie 3.1.5].

Twierdzenie 1.10 (Twierdzenie Gelfanda-Najmarka). *Niech A będzie C^* -algebrą. Istnieje wówczas wierna reprezentacja (\mathcal{H}, π) C^* -algebry A .*

Aby skonstruować uniwersalną C^* -algebrę generowaną przez izometrię rozważmy najpierw wolną $*$ -algebrę z jedyneką $\text{Alg}^*(U)$ generowaną przez element U . Przez $*$ -algebrę rozumiemy tu zespoloną algebrę wraz z inwolucją $*$ spełniającą relacje (1.6). Rozważmy $*$ -ideał $(U^*U - 1)$ w $\text{Alg}^*(U)$ generowany przez element $U^*U - 1$. Argumentacja z dowodu Lematu 1.4 pokazuje, że dla $*$ -algebry ilorazowej mamy:

$$\text{Alg}^*(U)/(U^*U - 1) = \text{span}\{U^n U^{*m} : n, m \in \mathbb{N}\}$$

W szczególności, jeśli $\pi : \text{Alg}^*(U)/(U^*U - 1) \rightarrow B(\mathcal{H})$ jest reprezentacją ($*$ -homomorfizmem) na pewnej przestrzeni Hilberta \mathcal{H} oraz $\sum_{n,m=1}^N \lambda_{n,m} U^n U^{*m}$ jest elementem $\text{Alg}^*(U)/(U^*U - 1)$ mamy

$$\left\| \pi \left(\sum_{n,m=1}^N \lambda_{n,m} U^n U^{*m} \right) \right\| \leq \sum_{n,m=1}^N |\lambda_{n,m}|.$$

Stąd wynika, że dla każdego $x \in \text{Alg}^*(U)/(U^*U - 1)$ supremum

$$\sup\{\|\pi(x)\| : \pi \text{-reprezentacja } * \text{-algebry } \text{Alg}^*(U)/(U^*U - 1)\},$$

(które będziemy oznaczać przez $\|x\|_{\max}$) jest skończone. Nietrudno zauważyć, że funkcja

$$x \rightarrow \|x\|_{\max}$$

jest normą na $*$ -algebrze $\text{Alg}^*(U)/(U^*U - 1)$ spełniającą C^* -równość.

Definicja 1.11. Uniwersalną C^* -algebrą generowaną przez nieodwracalną izometrię nazywamy C^* -algebrę:

$$C^*(\hat{U}) := \overline{\text{Alg}^*(U)/(U^*U - 1)}^{\max},$$

gdzie domknięcie brane jest względem normy $\|x\|_{\max}$ zdefiniowanej powyżej. Obraz elementu U w algebrze $\text{Alg}^*(U)/(U^*U - 1) \subseteq C^*(\hat{U})$ oznaczamy przez \hat{U} .

Stwierdzenie 1.12. *Przekształcenie $C^*(\hat{U}) \ni \hat{U} \mapsto S \in C^*(S)$ jednoznacznie przedłuża się do *-epimorfizmu Φ algebry $C^*(\hat{U})$ na $C^*(S)$. Element \hat{U} jest nieodwracalną izometrią, tj. $\hat{U}^*\hat{U} = 1$ i $\hat{U}\hat{U}^* \neq 1$.*

Dowód. Z definicji algebry wolnej otrzymujemy istnienie *-homomorfizmu $\text{Alg}^*(U) \rightarrow C^*(S)$ zadanego przez $U \mapsto S$. Skoro $S^*S - 1 = 0$, to odwzorowanie to faktoryzuje się do *-homomorfizmu

$$\text{Alg}^*(U)/(U^*U - 1) \rightarrow C^*(S)$$

zadanego przez $\hat{U} \mapsto S$. Z definicji normy $\|\cdot\|_{\max}$ na algebrze

$$\text{Alg}^*(U)/(U^*U - 1)$$

to ostatecznie odwzorowanie jest kontrakcją. Zatem przedłuża się ono jednoznacznie do *-homomorfizmu $C^*(\hat{U}) \mapsto C^*(S)$. Z konstrukcji \hat{U} jest izometrią i skoro jej obraz S jest operatorem nieodwracalnym, to \hat{U} jest operatorem nieodwracalnym. \square

Uwaga 1.13. *Z dowolności operatora S , dla algebry $C^*(\hat{U})$ możemy w analogiczny sposób (jak dla algebry $C^*(S)$) zdefiniować rdzeń $A_{\hat{U}}$, rzuty $P_n^{\hat{U}}$ oraz warunkową wartość oczekiwaną*

$$E_{\hat{U}} : C^*(\hat{U}) \longrightarrow A_{\hat{U}} \subseteq C^*(\hat{U}),$$

które będą posiadały te same własności co obiekty zdefiniowane dla S .

Z poniższego twierdzenia wynika już twierdzenie Coburn'a.

Twierdzenie 1.14. *Niech Φ będzie epimorfizmem z poprzedniego stwierdzenia. Wówczas Φ jest izomorfizmem C^* -algebr. Zatem każda C^* -algebra generowana przez nieodwracalną izometrię jest kanonicznie izomorficzna z $C^*(\hat{U})$.*

Dowód. Zauważmy najpierw, że

$$\Phi \circ E_{\hat{U}} = E_S \circ \Phi$$

istotnie dla każdego $a \in C^*(\hat{U})$ mamy

$$\Phi(E_{\hat{U}}(a)) = \Phi\left(\sum_{n=0}^{\infty} P_n^{\hat{U}} a P_n^{\hat{U}}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n \Phi(a) P_n = E_S(a).$$

Zalóżmy teraz, że $\Phi(a) = 0$. Wtedy $\Phi(aa^*) = \Phi(a)\Phi(a^*) = 0$. Stąd

$$\Phi(E_{\hat{U}}(a^*a)) = E_S(\Phi(a^*a)) = 0.$$

Złożenie izomorfizmów $A_{\hat{U}} \cong c(\mathbb{N}) \cong A_S$ pokazuje, że $\Phi : A_{\hat{U}} \rightarrow A_S$ jest izomorfizmem. Zatem

$$\Phi(E_{\hat{U}}(a^*a)) = 0 \implies E_{\hat{U}}(aa^*) = 0 \implies a^*a = 0 \implies a = 0.$$

Czyli Φ jest iniekcją, a więc i izomorfizmem. \square

Bibliografia

- [1] Coburn L. A., *The C^* -algebra generated by an isometry*, Bull. Amer. Math. Soc. **73** (5), 722-726.
- [2] J. Cuntz, *Simple C^* -algebras generated by isometries*, Commun. Math. Phys. **57** (1977), 173-185.
- [3] J. Cuntz, W. Krieger, *A class of C^* -algebras and topological Markov chains*. Inventiones Math. **56** (1980), 256-268.
- [4] Murphy G. J., *C^* -algebras and operator theory*, Academic Press, Inc., Boston, MA, 1990.
- [5] I. Raeburn, *Graph Algebras*. BMS Regional Conference Series in Mathematics, vol. 103, Amer. Math. Soc., Providence, 2005.