

Opinia promotora o rozprawie doktorskiej mgr. Krzysztofa Bardadyna
"Groupoid Banach algebras, weighted composition operators
on L^p -spaces and transfer operators"

Autor rozprawy jest także współautorem sześciu artykułów naukowych [BK21], [BK24], [BK26], [BKL24], [BKM25], [BKM26] oraz samodzielnym autorem pracy [Bar24]. Rozprawa w umiejętny sposób przedstawia i zestawia ze sobą wybrane wyniki z tych prac, a także zawiera pewne ich uogólnienia i uzupełnienia stanowiące całkiem nowe wyniki.

Podstawowy ogólny teoretyczny szkielet rozprawy bazuje na konstrukcjach i wynikach z prac [BKM25], [BKM26], w których opracowano podstawy teorii algebr Banacha zadanych przez skręcone grupoidy étalne (niekoniecznie Hausdorffa). Wyniki z tych prac wpisują się w obecnie popularny nurt badań zapoczątkowany przez Chrisa Phillipsa, około 15 lat temu, którego główną ideą jest próba rozszerzenia teorii C^* -algebr, czy też szerzej algebr operatorowych działających na przestrzeniach Hilberta, na algebry operatorów działających na przestrzeniach $L^p(\mu)$ funkcji całkowalnych w p -tej potęgzie, gdzie $p \in [1, \infty]$. W swojej rozprawie doktorskiej, mgr. Bardadyn przedstawia najważniejsze konstrukcje i twierdzenia z prac [BKM25], [BKM26] w twórczy i nowatorski sposób. W szczególności ogranicza się on do rozpatrywania grupoidów Hausdorffa, co pozwala mu na przeprowadzenie niektórych dowodów w inny, prostszy sposób. Ograniczenie to ma również tę zaletę, iż jak sam autor stwierdza w rozprawie, jego wkład w prace [BKM25], [BKM26] był największy właśnie w badaniach nad przypadkiem Hausdorffa. De facto, najpierw analogiczne wyniki mgr. Bardadyn otrzymał w pracy [BK26], gdzie analizował produkty krzyżowe działania grupy dyskretnej na przestrzeni topologicznej. Kolejną zaletą ograniczenia się do grupoidów Hausdorffa jest to, że czyni to i tak już dość abstrakcyjną i ogólną teorię nieco łatwiejszą do przyswojenia. W szczególności niniejszą rozprawę doktorską można traktować jako uzupełnienie i dobre wprowadzenie do prac [BKM25], [BKM26], dla czytelnika próbującego zaznajomić się z tą teorią. Ponadto decyzja o rozpatrywaniu przypadku Hausdorffa dobrze wpisuje się w kolejne cele jakie postawił przed sobą autor, czyli zastosowanie do grupoidów Renault-Deaconu. Wśród najważniejszych osiągnięć należy tutaj wymienić:

- (1) Wynalezienie definicji/konstrukcji uniwersalnych oraz zredukowanych algebr Banacha zadanych przez grupoid étalny;
- (2) Twierdzenie o dezintegracji i integracji reprezentacji uniwersalnych algebr Banacha i jego zastosowania do reprezentacji na przestrzeniach L^p ;
- (3) Dynamiczne kryteria własności prostoty oraz ogólniej własności przecinania ideałów w algebrach zredukowanych.

Dowody wyników, o których mowa w punkcie (2), w stosunku do pracy [BKM25], zostały uproszczone, a niektóre w istotny sposób zmienione. Ponadto w rozprawie poprzedza je ogólniejsze twierdzenie o dezintegracji reprezentacji dla ogólnych produktów krzyżowych Banacha przez inwersyjne półgrupy (Rozdział 4), co zostało zaraportowane w [BK26]. Podobnie prezentacja wyników (3) z [BKM26] została uproszczona. Dodatkowo zostały one zastosowane do grupoidów Renault-Deaconu (Podrozdział 6.3), które pomimo wielu przykładów w [BKM26] nie były do tej pory rozpatrywane poza kontekstem C^* -algebr. Te nowe zastosowania uogólniają w szczególności odpowiednie wyniki [BKL24] z C^* -algebr do L^p -algebr operatorowych, otrzymane w [BKL24] w inny sposób (bez korzystania z modelu grupoidowego).

Ponadto rozprawa zawiera kolejne dwa nowe wyniki/zagadnienia, które w mojej opinii zasługują na opublikowanie w formie dwóch kolejnych artykułów. Należą do nich:

- (a) Charakteryzacja ważonych operatorów kompozycji oraz pełny dowód i poprawne sformułowanie ogólnego twierdzenia Lampertiego dla przestrzeni L^p związanych z miarami lokalizowalnymi;
- (b) Wprowadzenie i opis grupoidowy L^p -operatorowych produktów krzyżowych przez operator przejścia z zastosowaniem do opisu widma ważonych operatorów kompozycji, które generują takie algebry.

Wyniki (a) pełnią kluczową rolę w różnych zagadnieniach, w tym w analizie algebr L^p -operatorowych. Takie twierdzenia znane są w różnym stopniu ogólności, ale wydaje się, że nie w takiej ogólności jak w rozprawie. Ponadto często są niepoprawnie formułowane już dla miar σ -skończonych. Wyniki (b) uogólniają część wyników [BK21] z C^* -algebr na L^p -algebry operatorowe.

W świetle powyższego, stwierdzam, że złożona rozprawa spełnia wymagane kryteria formalne określone w aktualnie obowiązujących aktach prawnych oraz kryteria zwyczajowe stawiane pracom doktorskim.

- [Bar24] K. Bardadyn, *L^p -Cuntz algebras and spectrum of weighted composition operators*, Geometric Methods in Physics XL, Trends in Mathematics, Birkhäuser, 2024, 189–198.
- [BK21] K. Bardadyn, B. K. Kwaśniewski, *Spectrum of weighted isometries*, Israel J. Math. **246** (2021), no. 1, 149–210.
- [BK24] K. Bardadyn, B. K. Kwaśniewski, *Topologically free actions and ideals in twisted Banach algebra crossed products*, Proc. Edinburgh Math. Soc., **156**(1) (2026), 157–187.
- [BK26] K. Bardadyn, B. K. Kwaśniewski, *Banach algebra crossed products by inverse semigroup actions*, to appear in Proceedings of the XLII Workshop on Geometric Methods in Physics, Trends in Mathematics, Birkhäuser, arXiv:2601.14907
- [BKL24] K. Bardadyn, B. K. Kwaśniewski, A. V. Lebedev, *C^* -algebras associated to transfer operators for countable-to-one maps*, Integr. Equ. Oper. Theory **96** (2024), 25.
- [BKM25] K. Bardadyn, B. Kwaśniewski, A. McKee, *Banach algebras associated to twisted étale groupoids*, J. Funct. Anal. **289** (2025), no. 12, 1–66.
- [BKM26] K. Bardadyn, B. Kwaśniewski, A. McKee, *Banach algebras associated to twisted étale groupoids: simplicity and pure infiniteness*, arXiv:2406.05717, to appear in Trans. Amer. Math. Soc.